



1 Interpolation

Viele Vorgänge in der Natur können in ihrer Komplexität nicht gänzlich erfasst werden. Daher stellt man für bestimmte Konstellationen Messungen an und versucht aufgrund dieser wenigen Daten Aussagen über unbekannte Zwischenwerte zu treffen. Dieses Vorgehen nennt man **interpolieren**.

Nehmen wir beispielsweise die zwei Wertepaare (1|1) und (3|4). Durch diese beiden Punkte könnten wir eine Gerade legen und berechnen welchen zugehörigen Wert wir bei 2 erhalten, ohne eine weitere Messung durchzuführen. Liegen drei Wertepaare vor, dann könnten wir eine Parabel (Funktion zweiten Grades) durch die drei Punkte legen und unbekannte Zwischenwerte berechnen. Der Funktionsgrad (der größte Exponent) ist also immer um eins kleiner als die Anzahl der Wertepaare. **Für n Punkte verwendet man folglich ein Polynom $n - 1$ ten Grades mit n unbekannten Koeffizienten.**

Polynome haben den Vorteil, dass sie leicht berechenbar und differenzierbar¹ sind. **Polynome** sind Terme folgender Gestalt: $a_0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$. Holen wir ein wenig aus und klären, warum Polynome leicht zu berechnen sind. Die Addition kennen wir aus der Grundschule und ist eine ganz einfache Berechnung. Darauf baut einiges in der Mathematik auf wie wir gleich sehen werden. Betrachten wir die Multiplikation von zwei und drei: $2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2$. Sie lässt sich auf die Addition zurückführen. Nehmen wir zum Beispiel die Potenz $3^2 = 3 \cdot 3 = 3 + 3 + 3$. Diese lässt sich auf eine Multiplikation und damit auch wieder auf eine Addition zurückführen. Wir müssten also einem Taschenrechner oder Computer nur die Addition „beibringen“ und könnten damit auch Potenzen und Produkte von natürlichen Zahlen leicht berechnen. Um ein Polynom zu berechnen, benötigen wir daher nur die Addition (wenn man nur natürliche Koeffizienten hat). Lässt man auch andere Koeffizienten (die Faktoren vor den Potenzen) zu, dann wird es nur geringfügig schwerer. Zur Bestimmung eines geeigneten Polynoms wollen wir im Folgenden zwei verschiedene Ansätze näher betrachten.

2 Standardansatz

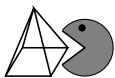
Gehen wir von folgenden gegebenen Wertepaaren aus, die wir als **Stützpunkte** bezeichnen wollen: $P(1|6)$, $Q(2|11)$ und $R(3|18)$. Für *drei* Stützpunkte verwenden wir als Ansatz ein Polynom *zweiten* Grades: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Gesucht sind demnach die *drei* Koeffizienten a , b und c . Um diese zu berechnen setzen wir in die allgemeine Funktionsgleichung der Reihe nach die Koordinaten der Stützpunkte ein und erhalten folgendes Gleichungssystem:

$$6 = a + b + c \quad (1)$$

$$11 = 4a + 2b + c \quad (2)$$

$$18 = 9a + 3b + c \quad (3)$$

¹ Eine Funktion ist differenzierbar, wenn man ihre Ableitung bestimmen kann.



Um das Gleichungssystem zu lösen, können wir beispielsweise den Gauß-Algorithmus oder das Additionsverfahren anwenden. Entscheiden wir uns hier für Letzteres, dann wäre ein möglicher Weg: Gleichung (2) minus Gleichung (1) und Gleichung (3) minus Gleichung (2) und erhalten:

$$5 = 3a + b \quad (4)$$

$$7 = 5a + b \quad (5)$$

Damit fällt der Parameter c weg und wir haben das Gleichungssystem reduziert auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Ziehen wir jetzt Gleichung (4) von Gleichung (5) ab, so erhalten wir:

$$2 = 2a \quad (6)$$

Und damit gilt: $a = 1$. Setzen wir die gefundene Lösung beispielsweise in Gleichung (4) ein, so ergibt sich:

$$5 = 3 + b \quad (7)$$

Also gilt: $b = 2$. Jetzt fehlt nur noch c . Dazu setzen wir die Lösungen für a und b in Gleichung (1) ein:

(8)

Daraus folgt für c : $c = 3$ und wir erhalten als gesuchtes **Stützpolynom**: $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

Nachteile bei diesem Verfahren sind:

- Der Rechenaufwand ist recht groß.
- Werden nachträglich neue Stützstellen ergänzt, dann muss die komplette Berechnung erneut durchgeführt werden.

Zum Abschluss der allgemeine Standardansatz für das Stützpolynom bei n Stützpunkten:

$$f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

3 Newton'scher Ansatz

Isaac Newton² entdeckte eine besonders elegante Methode zum Auffinden von Stützpolynomen. Seine Methode hat folgende entscheidende **Vorteile**:

- Der Rechenaufwand ist gering, da ein leicht lösbares Dreieckssystem entsteht.

² Isaac Newton (* 1643 in Whoolsthorpe bei Grantham, † 1727 in Kensington) war ein berühmter englischer Physiker



- Zusätzliche Stützpunkte können einfach ergänzt werden, da sich bereits bekannte Parameter nicht mehr ändern.

Verwenden wir auch hier die drei Punkte $P(1|6)$, $Q(2|11)$ und $R(3|18)$ aus dem vorherigen Abschnitt und bestimmen dazu das Stützpolynom mit dem Ansatz von Newton. Dieser sieht für drei Punkte ebenfalls ein Polynom zweiten Grades vor:

$$f(x) = a + b(x - x_1) + c(x - x_1)(x - x_2).$$

Für den Ansatz hier werden also nur zwei der drei Punkte gebraucht. Welche Punkte das sind ist beliebig wählbar! Ersetzen wir x_1 und x_2 durch die x -Koordinaten der Punkte P und Q erhalten wir: $f(x) = a + b(x - 1) + c(x - 1)(x - 2)$. Jetzt setzen wir der Reihe nach die beiden Koordinaten von allen drei Punkten ein und erhalten so das folgende Gleichungssystem:

$$6 = a + 0 + 0$$

$$11 = a + 1b + 0$$

$$18 = a + 2b + 2c$$

Lässt man die überflüssigen Nullen weg, erkennt man die Dreiecksform, die das Lösen des Gleichungssystems so schön vereinfacht und bei dem Newton-Ansatz *immer* entsteht:

$$6 = a \tag{9}$$

$$11 = a + 1b \tag{10}$$

$$18 = a + 2b + 2c \tag{11}$$

In der Gleichung (9) steht direkt die Lösung für Parameter a : $a = 6$. Setzen wir dieses Zwischenergebnis in die nächste Gleichung (10) ein...

$$11 = 6 + b \tag{12}$$

...folgt daraus, dass $b = 5$ gelten muss. Fehlt nur noch c . Dazu setzen wir die Ergebnisse für a und b in Gleichung (11) ein und erhalten:

$$18 = 6 + 10 + 2c \tag{13}$$

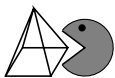
Lösen wir diese letzte Gleichung nach c auf, so ergibt sich $c = 1$. Jetzt können wir alle Parameter im Ansatz ersetzen und erhalten als Stützpolynom: $f(x) = 6 + 5(x - 1) + 1(x - 1)(x - 2)$. Lösen wir die Klammern auf der rechten Seite auf und fassen ein wenig zusammen, erhalten wir:

$$f(x) = 6 + 5x - 5 + x^2 - 1x - 2x + 2 \tag{14}$$

$$= x^2 + 2x + 3 \tag{15}$$

Wie wir sehen können **stimmen die Stützpolynome der beiden Ansätze überein!**

Der große Vorteil von Newton's Ansatz ist neben der leichten Berechenbarkeit die einfache Möglichkeit, Stützpunkte zu ergänzen. Betrachten wir dazu die beiden Punkte $S(4|27)$ und $T(5|62)$. Wie wir leicht nachrechnen können liegt der Punkt S auf dem Graphen des Stützpolynoms ($f(4) = 27$), sodass sich bei der Ergänzung dieses Punkts das Stützpolynom *nicht*



ändert. Anders verhält es sich jedoch, wenn wir Punkt T zu unseren Stützpunkten hinzunehmen. Dieser liegt nicht auf dem bisherigen Graphen des Stützpolynoms. Schauen wir uns an was passiert: Der Ansatz lautet jetzt: $f(x) = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2) + d(x-1)(x-2)(x-3)$. Es kommt lediglich ein Summand hinzu. Das bedeutet auch, dass **sich das bisherige Gleichungssystem nicht ändert und nur eine neue Gleichung hinzukommt** (hier Gleichung 16):

$$6 = a \quad (9)$$

$$11 = a + 1b \quad (10)$$

$$18 = a + 2b + 2c \quad (11)$$

$$62 = a + 4b + 12c + 24d \quad (16)$$

Daher ändern sich auch die bisherigen Ergebnisse für a , b und c nicht. Wir müssen also nur die bekannten Werte $a = 6$, $b = 5$ und $c = 1$ in die Gleichung (16) einsetzen und erhalten:

$$62 = 6 + 20 + 12 + 24d \quad (17)$$

Lösen wir nach d auf, folgt daraus: $\boxed{d = 1}$. Damit haben wir unser neues Stützpolynom gefunden:

$$f(x) = \underbrace{6 + 5(x-1) + 1(x-1)(x-2)} + 1(x-1)(x-2)(x-3)$$

Für die ersten drei Summanden können wir auf die bisherige Zusammenfassung zurückgreifen und den letzten Summanden schreiben wir vorerst nur ab:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 + 1 \left[(x-1)(x-2) \right] (x-3)$$

Jetzt müssen wir nur noch die drei runden Klammern auflösen. Beginnen wir mit den ersten beiden, die bereits in eckigen Klammern eingefasst sind:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + 3 + 1 \left[x^2 - 3x + 2 \right] (x-3) \\ &= x^2 + 2x + 3 + x^3 - 3x^2 + 2x - 3x^2 + 9x - 6 \\ &= x^3 - 5x^2 + 13x - 3 \end{aligned}$$

Das gesuchte Stützpolynom ist also $\boxed{f(x) = x^3 - 5x^2 + 13x - 3}$.

Zur Probe könnten wir jetzt die x -Koordinaten der Stützpunkte einsetzen und überprüfen, ob wir die passenden y -Koordinaten als Funktionswerte erhalten.

4 Approximation von Funktionen

Zuerst müssen wir klären, was Approximationen sind und warum man diese überhaupt braucht. Stell dir einmal vor du müsstest $\sin(50^\circ)$ ohne Taschenrechner bestimmen. Oder e^2 per Hand ausrechnen (e ist die Eulersche Zahl). Natürlich kann man nun erwidern, dass es doch dafür einen Taschenrechner gibt! Doch wie macht der Taschenrechner das eigentlich? Alle möglichen Werte im Taschenrechner zu speichern wäre unsinnig. Und dann gibt



es schließlich auch noch Kosinus, Tangens... Der Taschenrechner verwendet eine Formel, um das Quadrat der Eulerschen Zahl ungefähr zu bestimmen. Er approximiert also den Wert³. Beispielsweise ergibt $e^2 \approx 7,389056099$. Mehr als neun Nachkommastellen zeigt ein handelsüblicher Taschenrechner nicht an, obwohl die Zahl noch weiter geht. Bei vielen Problemen reicht jedoch eine Genauigkeit von wenigen Nachkommastellen aus. Daher verwenden wir Approximationen (Annäherungen).

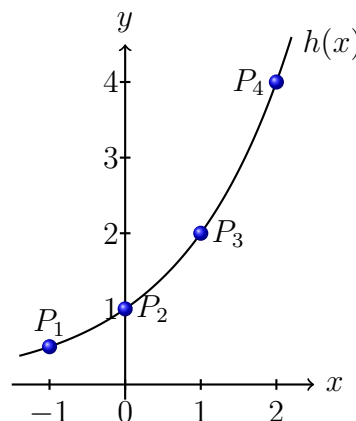
Wie bei der Interpolation bieten sich Polynome als Näherung an. Beispielsweise kann man die e -Funktion approximieren durch:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Hier haben wir ein Polynom, das sich leicht berechnen lässt. Setzen wir $x = 2$ in die ersten acht Summanden ein, dann erhalten wir $e^2 \approx 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!} \approx 7,38$. Wenn das Ergebnis nur auf eine Nachkommastelle genau sein soll, dann wären wir schon fertig. Die Genauigkeit des Ergebnisses steigt übrigens, wenn wir mehr Summanden berechnen: $1 + \frac{2}{1!} + \dots + \frac{2^{11}}{11!} + \frac{2^{12}}{12!} \approx 7,38905$. Doch wie kommt man auf solche Polynome? Genau davon handeln die nächsten beiden Kapitel.

5 Funktionsapproximation durch Interpolation

Gegeben sei die Funktion $h(x) = 2^x$. Diese soll im abgebildeten Bereich approximiert werden. Eine Möglichkeit der Approximation besteht darin, Stützstellen zu verwenden und ein Stützpolynom nach einem der bereits behandelten Verfahren zu berechnen. Eine weitere Möglichkeit wird in Kapitel 6 vorgestellt. Doch dazu später mehr. Betrachten wir einmal den Graphen von $h(x)$ und wählen als Stützstellen die blau markierten Punkte P_1 bis P_4 . Bestimmen wir dann für $P_1(-1|0,5)$, $P_2(0|1)$, $P_3(1|2)$ und $P_4(2|4)$ das Stützpolynom $f(x)$ (entweder mit dem Standardansatz oder dem Newton-Ansatz), so erhalten wir: $f(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$.



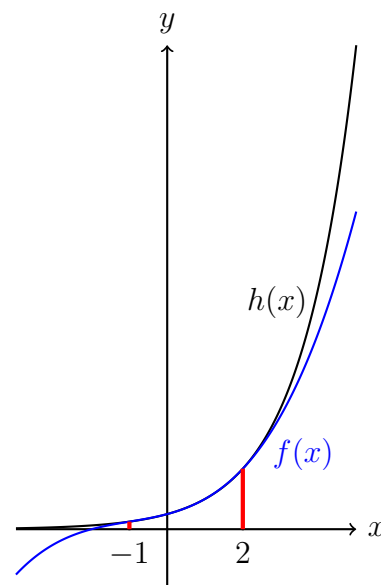
Jetzt können wir mit diesem Polynom beispielsweise den Funktionswert an der Stelle $x = 0,5$ interpolieren: $f(0,5) = \frac{45}{32} = 1,40625$. Der korrekte Wert wäre: $h(x) = 2^{0,5} = \sqrt{2} = 1,4142\dots$. Vergleichen wir die beiden Funktionswerte, dann erhalten wir mittels Dreisatz eine prozentuale Abweichung von $\left| 100\% - \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \frac{45}{32} \% \right| \approx 0,563\%$:

$$\begin{aligned} h(0,5) &= \sqrt{2} \hat{=} 100\% \\ 1 &\hat{=} \frac{100}{\sqrt{2}} \% \\ f(0,5) &= \frac{45}{32} \hat{=} \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \frac{45}{32} \% \approx 99,43689\% \end{aligned}$$

³ Es kann auch sein, dass der Taschenrechner e oder beispielsweise π als Konstante gespeichert hat.

Die Abweichung ist sehr gering, daher erhalten wir hier eine gute Approximation (Näherung). Untersucht man das Intervall $[-1; 2]$, in dem alle Stützstellen liegen, genauer, dann stellt man fest, dass die größte Abweichung gerade mal 1,9% beträgt und im Durchschnitt nur 0,6%.

Doch wie sieht die Abweichung außerhalb des Intervalls $[-1; 2]$ aus? Betrachten wir einmal $h(4) = 16$ und $f(4) = 13$, dann ergibt sich daraus eine prozentuale Abweichung (die man leicht selbst nachrechnen kann) von 18,75%. Außerhalb des gewählten Intervalls ist die Approximation also deutlich schlechter. **Allgemein kann man (nur) aussagen, dass die Approximation innerhalb des Stützstellen-Intervalls in der Regel besser ist als außerhalb.** Wie gut innerhalb bzw. schlecht außerhalb des Stützstellen-Intervalls die Approximation ist, muss im Einzelfall genauer untersucht werden. Dazu kann man keine allgemeingültige Aussage treffen!



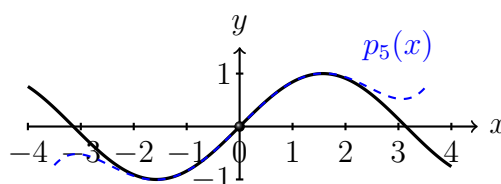
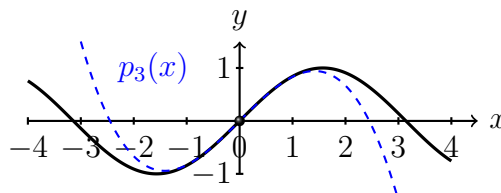
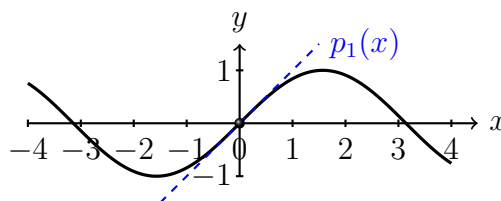
Kommen wir nun zu einer weiteren, jedoch vom Ansatz her ganz anderen Art der Approximation: den Taylorpolynomen.

6 Taylorpolynome

Gesucht ist ein Polynom, das eine Funktion an einer Stelle x_0 „gut“ approximiert. Die Annäherung wird besser, wenn nicht nur an der Stelle x_0 die Funktionswerte übereinstimmen, sondern auch die Ableitungen an dieser Stelle. Die Ableitungen geben bekanntlich die Änderungsrate an und wenn diese auch übereinstimmen, dann schmiegt sich das Polynom besser an den Graph der Funktion an. Betrachten wir dazu ein Beispiel: Hier wird die Sinusfunktion durch ein Polynom $p_n(x)$ an der **Entwicklungsstelle** $x_0 = 0$ approximiert.

Im Intervall $x \in [-1; 1]$ sieht die Approximation der Sinusfunktion durch unsere blau gezeichnete Gerade ganz gut aus. Betrachten wir jedoch größere oder kleinere x -Werte, dann sieht es eher schlecht aus! Erhöhen wir jedoch den Funktionsgrad n unseres Polynoms, nehmen wir also anstatt der Geraden ein Polynom dritten Grades, dann vergrößert sich das Intervall, in dem von einer guten Approximation gesprochen werden kann.

Bei einem Polynom fünften Grades sieht die Approximation dann noch besser aus.





Brook Taylor⁴ hatte eben diese Idee, daher der Name Taylorpolynom. Auf die Herleitung des allgemeinen Ansatzes soll an dieser Stelle verzichtet werden.

Gegeben sei eine Funktion f , die an der Entwicklungsstelle x_0 mindestens n -mal differenzierbar ist. Dann lautet das Taylorpolynom n -ter Ordnung $p_n(x)$ von f an der x_0 :

$$p_n(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Beginnen wir mit einem einfachen Beispiel: Wir wollen die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ durch ein Polynom zweiten Grades approximieren. Da $f(x) = e^x = f'(x) = \cdots = f^{(n)}(x)$ gilt, braucht man nicht mühsam die Ableitungen zu berechnen. Das Taylorpolynom lautet daher:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{e}{0!} + \frac{e}{1!}(x - 1) + \frac{e}{2!}(x - 1)^2 \\ &= e + e \cdot (x - 1) + \frac{e}{2}(x^2 - 2x + 1) \\ &= e + ex - e + \frac{e}{2}x^2 - ex + \frac{e}{2} \\ &= \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{2} \end{aligned}$$

Nehmen wir als zweites Beispiel die Sinusfunktion, also $f(x) = \sin(x)$, mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und berechnen dazu das Taylorpolynom zweiter Ordnung. Dazu benötigen wir die ersten beiden Ableitungen: $f'(x) = \cos(x)$ und $f''(x) = -\sin(x)$.

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{\sin(0)}{0!} + \frac{\cos(0)}{1!}(x - 0) + \frac{-\sin(0)}{2!}(x - 0)^2 \\ &= 0 + 1x - 0 \\ &= x \end{aligned}$$

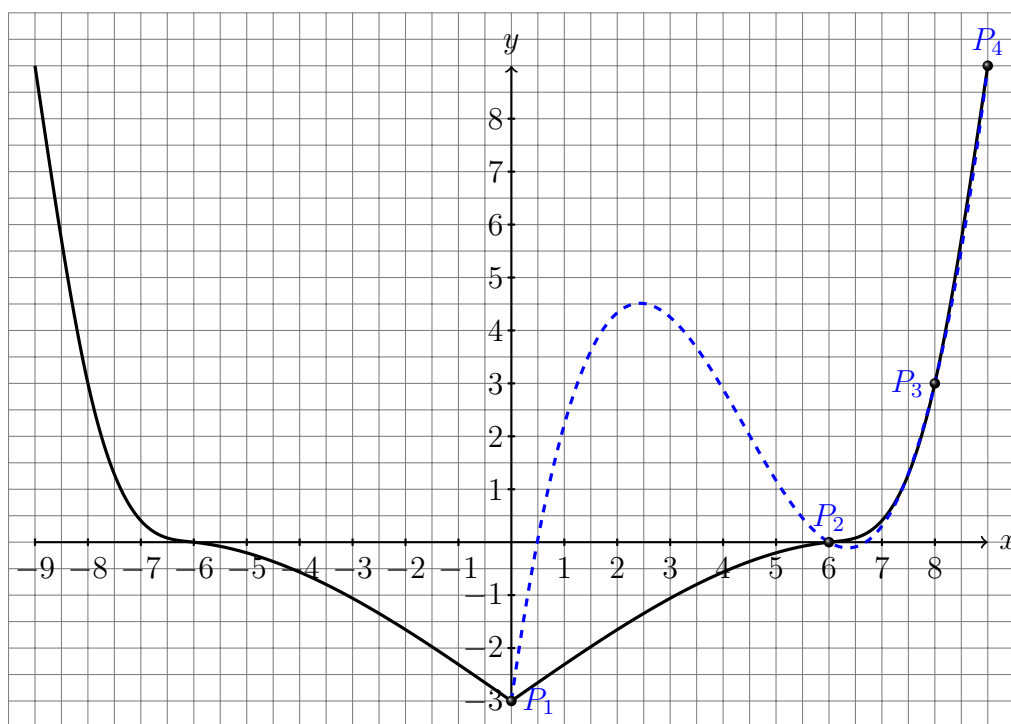
Wir erhalten in diesem besonderen Fall ein Polynom ersten Grades und es gilt: $p_1(x) = p_2(x) = x$. Das Taylorpolynom zweiter Ordnung stellt also keine Verbesserung zum Taylorpolynom erster Ordnung dar. Wie man leicht selbst nachrechnen kann ergibt sich nur bei ungerader Ordnung eine Verbesserung: $p_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x$.

Wie gut die Approximation des Taylorpolynoms in der weiteren Umgebung von der Entwicklungsstelle x_0 ist, hängt sehr stark von der Funktion f ab und kann hier pauschal nicht beantwortet werden!

⁴ Brook Taylor (* 1685 in Edmonton, Middlesex, † 1731 in Somerset House, London) war ein britischer Mathematiker.

7 Spline-Interpolation

Zur Konstruktion von Spanten (tragende Bauteile zur Verstärkung des Rumpfes bei Booten) wurden früher elastisch biegsame Latten verwendet, sogenannte Straklatten (engl. *splines*). Wegen der Elastizität des Materials entstand eine Biegelinie mit **kleinster Gesamtkrümmung**. Betrachten wir dazu ein Beispiel:



Die Abbildung zeigt in schwarz einen Querschnitt eines Bootes. Zu den vier eingezeichneten Punkten soll ein Polynom dritten Grades (hier bereits in blau und gestrichelt eingezeichnet) bestimmt werden, um den Kurvenverlauf zu approximieren. Wie man selbst nachrechnen kann, ergibt sich als Interpolationspolynom $f(x) = \frac{11}{72}x^3 - \frac{145}{72}x^2 + \frac{85}{12}x - 3$. Vergleichen wir das Original (in schwarz) mit der Lösung (gestrichelt und in blau), dann sehen wir, dass dieser Ansatz vollkommen unbrauchbar ist, da die Abweichung zwischen den ersten beiden Punkten viel zu groß ist! Übrigens: da das Boot achsensymmetrisch ist, reicht der Ansatz für eine Seite (hier die rechte). Für die linke Seite käme als Lösung heraus: $f(x) = -\frac{11}{72}x^3 - \frac{145}{72}x^2 - \frac{85}{12}x - 3$.

Hier muss daher ein neuer Ansatz her: Jeweils zwischen zwei Stützpunkten wird eine kubische Teilfunktion modelliert, sodass die Gesamtfunktion stetig, differenzierbar und eine minimale Gesamtkrümmung aufweist:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{für } 0 \leq x < 6 \\ s_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{für } 6 \leq x < 8 \\ s_3(x) = a_3x^3 + b_3x^2 + c_3x + d_3 & \text{für } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Das Verfahren ist deutlich aufwendiger, da bereits bei vier Stützpunkten 12 Parameter berechnet werden müssen. Dazu müssen folgende Bedingungen bzw. Gleichungen erfüllt sein:



(1.) $s(x)$ soll stetig sein, das heißt es darf keine Sprungstellen geben oder anders formuliert: an den Anschlussstellen (6 und 8) der Teilfunktionen müssen die Funktionswerte übereinstimmen.

$$\begin{aligned} \bullet s_1(0) &= d_1 = -3 & \bullet s_2(8) &= 512a_2 + 64b_2 + 8c_2 + d_2 = 3 \\ \bullet s_1(6) &= 216a_1 + 36b_1 + 6c_1 + d_1 = 0 & \bullet s_3(8) &= 512a_3 + 64b_3 + 8c_3 + d_3 = 3 \\ \bullet s_2(6) &= 216a_2 + 36b_2 + 6c_2 + d_2 = 0 & \bullet s_3(9) &= 729a_3 + 81b_3 + 9c_3 + d_3 = 9 \end{aligned}$$

(2.) $s(x)$ soll differenzierbar sein, folglich müssen an den Anschlussstellen die ersten Ableitungen übereinstimmen. Dadurch ergibt sich ein knickfreier Übergang.

$$\begin{aligned} \bullet s'_1(6) &= 108a_1 + 12b_1 + c_1 = 108a_2 + 12b_2 + c_2 = s'_2(6) \\ \bullet s'_2(8) &= 192a_2 + 16b_2 + c_2 = 192a_3 + 16b_3 + c_3 = s'_3(8) \end{aligned}$$

(3.) An den Anschlussstellen soll die Krümmung übereinstimmen, daher müssen die zweiten Ableitungen an diesen Stellen gleich sein.

$$\bullet s''_1(6) = 36a_1 + 2b_1 = 36a_2 + 2b_2 = s''_2(6) \quad \bullet s''_2(8) = 48a_2 + 2b_2 = 48a_3 + 2b_3 = s''_3(8)$$

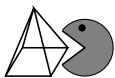
(4.) Da die Biegelinie am Anfang und am Ende ungekrümmt verläuft, muss dort die zweite Ableitung null sein.

$$\bullet s''_1(0) = 2b_1 = 0 \quad \bullet s''_3(9) = 54a_3 + 2b_3 = 0$$

Zu Fuß wird man das beschriebene Gleichungssystem kaum lösen wollen, daher bietet sich der Einsatz eines grafikfähigen Taschenrechners (GTR) oder eines Computer-Algebra-Systems (CAS) an. Deswegen wird hier auch auf den Lösungsweg verzichtet. Für die Praxis sind kubische Splines und auch Bézierkurven (auf die hier nicht eingegangen werden konnte) jedoch weitaus wichtiger als der Standardansatz aus Kapitel 2 oder der Newton-Ansatz aus Kapitel 3! Allerdings werden diese Probleme nicht mehr ohne Rechnerunterstützung gelöst.

Der Vollständigkeit halber zum Abschluss noch die Lösung:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = -\frac{1}{184}x^3 + \frac{16}{23}x - 3 & \text{für } 0 \leq x < 6 \\ s_2(x) = \frac{73}{184}x^3 - \frac{333}{46}x^2 + \frac{1015}{23}x - \frac{2067}{23} & \text{für } 6 \leq x < 8 \\ s_3(x) = -\frac{35}{46}x^3 + \frac{945}{46}x^2 - \frac{4097}{23}x + \frac{11565}{23} & \text{für } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$



8 Übungsaufgaben

8.1 Stützpolynome

Bestimmen Sie für folgende gegebene Punkte das Stützpolynom (Standardansatz oder Newton-Ansatz):

- a) $P_1(-2|-1), P_2(-1|1), P_3(3|4)$
- b) $P_1(-5|12), P_2(-2|3), P_3(3|8), P_4(5|17)$
- c) $P_1(-2|22), P_2(0|4), P_3(2|10), P_4(4|16)$
- d) $P_1(-3|-5), P_2(-1|2), P_3(2|-4), P_4(5|23)$
- e) $P_1(-2|8), P_2(0|1), P_3(2|-4)$ und erweitern Sie bei dieser Teilaufgabe ihren ursprünglichen Ansatz um $P_{\text{neu}}(4|-13)$

8.2 Taylorpolynome

Bestimmen Sie zu den gegebenen Funktionen f das zugehörige Taylorpolynom an der jeweiligen Entwicklungsstelle x_0 .

- a) $f(x) = \sin(x); \quad x_0 = \pi; \quad \text{Ordnung: } 1$
- b) $f(x) = \cos(x); \quad x_0 = 0; \quad \text{Ordnung: } 2$
- c) $f(x) = \sqrt{x}; \quad x_0 = 2; \quad \text{Ordnung: } 1$
- d) $f(x) = e^{-2x}; \quad x_0 = 0; \quad \text{Ordnung: } 2$
- e) $f(x) = e^{-x^2}; \quad x_0 = 0; \quad \text{Ordnung: } 4$
- f) $f(x) = e^x; \quad x_0 = 1; \quad \text{Ordnung: } 2$



9 Lösungen

9.1 Stützpolynome

- a) Parameter beim Newton-Ansatz: $a = -1, b = 2, c = -\frac{1}{4}$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{5}{2}$$

- b) Parameter beim Newton-Ansatz: $a = 12, b = -3, c = \frac{1}{2}, d = 0$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$$

Hinweis: Da der Punkt P_4 auf dem gesuchten Stützpolynom liegt, ergibt sich nur ein Polynom zweiten Grades und nicht wie erwartet ein Polynom dritten Grades!

- c) Parameter beim Newton-Ansatz: $a = 22, b = -9, c = 3, d = -\frac{1}{2}$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - x + 4$$

- d) Parameter beim Newton-Ansatz: $a = -5, b = \frac{7}{2}, c = -\frac{11}{10}, d = \frac{11}{30}$

$$f(x) = \frac{11}{30}x^3 - \frac{11}{30}x^2 - \frac{41}{15}x$$

- e) Parameter beim Newton-Ansatz: $a = 8, b = -\frac{7}{2}, c = \frac{1}{4}, [d = -\frac{1}{8}]$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 1 \text{ und nach der Erweiterung: } f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$$

9.2 Taylorpolynome

- a) $p_1(x) = -x + \pi$

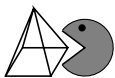
- b) $p_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$

- c) $p_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$

- d) $p_2(x) = 2x^2 - 2x + 1$

- e) $p_4(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1$

- f) $p_2(x) = \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{2}$



10 Ausführliche Lösungen

10.1 Stützpolynome

a) **Standardansatz** $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{rcl} 4a - 2b + 1c & = & -1 \\ 1a - 1b + 1c & = & 1 \\ 9a + 3b + 1c & = & 4 \end{array} \right| \\ \text{Gauß-Algorithmus} \downarrow \\ \left| \begin{array}{rcl} 4a - 2b + 1c & = & -1 \\ 2b - 3c & = & -5 \\ -\frac{10}{3}b + \frac{5}{9}c & = & -\frac{25}{9} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{rcl} 4a - 2b + 1c & = & -1 \\ 2b - 3c & = & -5 \\ -\frac{8}{3}c & = & -\frac{20}{3} \end{array} \right| \\ \Rightarrow c = \frac{5}{2} \\ \Rightarrow b = \frac{5}{4} \\ \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{rcl} 4a - 2b + 1c & = & -1 \quad \textcircled{1} \\ 1a - 1b + 1c & = & 1 \quad \textcircled{2} \\ 9a + 3b + 1c & = & 4 \quad \textcircled{3} \end{array} \right| \\ \text{Additionsverfahren} \downarrow \\ \left| \begin{array}{rcl} 3a - 1b & = & -2 \quad \textcircled{4} = \textcircled{1} - \textcircled{2} \\ 8a + 4b & = & 3 \quad \textcircled{5} = \textcircled{3} - \textcircled{2} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{rcl} 20a & = & -5 \quad \textcircled{6} = \textcircled{5} + 4 \cdot \textcircled{4} \end{array} \right| \\ \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \\ \Rightarrow b = \frac{5}{4} \\ \Rightarrow c = \frac{5}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{5}{2}}$$

Newton-Ansatz $f(x) = a + b(x+2) + c(x+2)(x+1)$

$$\begin{array}{l} -1 = a \\ 1 = a + 1b \quad \Rightarrow b = 2 \\ 4 = a + 5b + 20c \quad \Rightarrow c = -\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 + 2(x+2) - \frac{1}{4}[(x+2)(x+1)] \\ &= -1 + 2x + 4 - \frac{1}{4}[x^2 + 3x + 2] \\ &= -1 + 2x + 4 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{5}{2}}$$



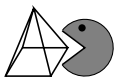
b) **Standardansatz** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\downarrow$ Gauß-Algorithmus	$\begin{array}{rrcr} -125a + & 25b - & 5c + & 1d = & 12 \\ -8a + & 4b - & 2c + & 1d = & 3 \\ 27a + & 9b + & 3c + & 1d = & 8 \\ 125a + & 25b + & 5c + & 1d = & 17 \end{array}$
	$\begin{array}{rrcr} -125a + & 25b - & 5c + & 1d = & 12 \\ & -37\frac{1}{2}b + 26\frac{1}{4}c - 14\frac{5}{8}d = & -34\frac{7}{8} \\ & 66\frac{2}{3}b + 8\frac{8}{9}c + 5\frac{5}{8}d = & 49 \\ & 50b & + & 2d = & 29 \end{array}$
	$\begin{array}{rrcr} -125a + & 25b - & 5c + & 1d = & 12 \\ & -37\frac{1}{2}b + 26\frac{1}{4}c - 14\frac{5}{8}d = & -34\frac{7}{8} \\ & & 31\frac{1}{4}c - 11\frac{1}{2}d = & -7\frac{2}{7} \\ & & 26\frac{1}{4}c - 13\frac{1}{8}d = & -13\frac{1}{8} \end{array}$
	$\begin{array}{rrcr} -125a + & 25b - & 5c + & 1d = & 12 \\ & -37\frac{1}{2}b + 26\frac{1}{4}c - 14\frac{5}{8}d = & -34\frac{7}{8} \\ & & 31\frac{1}{4}c - 11\frac{1}{2}d = & -7\frac{2}{7} \\ & & & 4\frac{1}{6}d = & 8\frac{1}{3} \end{array}$
$\Rightarrow d = 2 \Rightarrow c = 1/2 \Rightarrow b = 1/2 \Rightarrow a = 0$	

$\downarrow$ Additionsverfahren	$\begin{array}{rrcr} -125a + 25b - 5c + 1d = 12 & & ① \\ -8a + 4b - 2c + 1d = 3 & & ② \\ 27a + 9b + 3c + 1d = 8 & & ③ \\ 125a + 25b + 5c + 1d = 17 & & ④ \end{array}$
	$\begin{array}{rrcr} -117a + 21b - 3c & = & 9 & & ⑤=①-② \\ 35a + 5b + 5c & = & 5 & & ⑥=③-② \\ 250a & + & 10c & = & 5 & & ⑦=④-① \end{array}$
	$\begin{array}{rrcr} -39a + 7b - 1c & = & 3 & & ⑤=1/3 \cdot ⑤ \\ 49a + 7b + 7c & = & 7 & & ⑥=7/5 \cdot ⑥ \\ 50a & + & 2c & = & 1 & & ⑦=1/5 \cdot ⑦ \end{array}$
	$\begin{array}{rrcr} 50a & + & 2c & = & 1 & & ⑦ \\ 88a & + & 8c & = & 4 & & ⑧=⑥-⑤ \end{array}$
	$\begin{array}{rrcr} 50a & + & 2c & = & 1 & & ⑦ \\ 22a & + & 2c & = & 1 & & ⑧=1/4 \cdot ⑧ \end{array}$
	$\begin{array}{rrcr} 28a & & & = & 0 & & ⑨=⑦-⑧ \end{array}$
$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow c = 1/2 \Rightarrow b = 1/2 \Rightarrow d = 2$	

$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2}$

Hinweis: Da der Punkt P_4 auf dem gesuchten Stützpolynom liegt, ergibt sich nur ein Polynom zweiten Grades und nicht wie erwartet ein Polynom dritten Grades!



Newton-Ansatz $f(x) = a + b(x+5) + c(x+5)(x+2) + d(x+5)(x+2)(x-3)$

$$12 = a$$

$$3 = a + 3b \quad \Rightarrow b = -3$$

$$8 = a + 8b + 40c \quad \Rightarrow c = 1/2$$

$$17 = a + 10b + 70c + 140d \quad \Rightarrow d = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 12 - 3(x+5) + \frac{1}{2}[(x+5)(x+2)] + 0 \cdot (x+5)(x+2)(x-3) \\ &= 12 - 3x - 15 + \frac{1}{2}[x^2 + 7x + 10] \\ &= 12 - 3x - 15 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2}$$

Hinweis: Da der Punkt P_4 auf dem gesuchten Stützpolynom liegt, ergibt sich nur ein Polynom zweiten Grades und nicht wie erwartet ein Polynom dritten Grades!



c) **Standardansatz** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\downarrow$ Gauß-Algorithmus	$\begin{array}{rcl} -8a + 4b - 2c + 1d & = & 22 \\ 8a + 4b + 2c + 1d & = & 10 \\ 64a + 16b + 4c + 1d & = & 16 \\ & & 1d = 4 \end{array}$
	$\begin{array}{rcl} -8a + 4b - 2c + 1d & = & 22 \\ & 8b & + 2d = 32 \\ & 6b - 1\frac{1}{2}c + 1\frac{1}{8}d & = 24 \\ & & 1d = 4 \end{array}$
	$\begin{array}{rcl} -8a + 4b - 2c + 1d & = & 22 \\ & 8b & + 2d = 32 \\ & & 2c + \frac{1}{2}d = 0 \\ & & 1d = 4 \end{array}$

$\Rightarrow d = 4 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = -1/2$

$\downarrow$ Additionsverfahren	$\begin{array}{rcl} -8a + 4b - 2c + 1d & = & 22 \quad \textcircled{1} \\ 8a + 4b + 2c + 1d & = & 10 \quad \textcircled{2} \\ 64a + 16b + 4c + 1d & = & 16 \quad \textcircled{3} \\ & & 1d = 4 \quad \textcircled{4} \text{ in } \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ einsetzen} \end{array}$
	$\begin{array}{rcl} -8a + 4b - 2c & = & 18 \quad \textcircled{1} \\ 8a + 4b + 2c & = & 6 \quad \textcircled{2} \\ 32a + 8b + 2c & = & 6 \quad \textcircled{3} = 1/2 \cdot \textcircled{3} \end{array}$
	$\begin{array}{rcl} 24a + 12b & = & 24 \quad \textcircled{5} = \textcircled{3} + \textcircled{1} \\ & 8b & = 24 \quad \textcircled{6} = \textcircled{1} + \textcircled{2} \end{array}$

$\Rightarrow d = 4 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = -1/2 \Rightarrow c = -1$

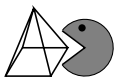
$\Rightarrow \boxed{f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - x + 4}$

Newton-Ansatz $f(x) = a + b(x+2) + c(x+2)x + d(x+2)x(x-2)$

$22 = a$	
$4 = a + 2b$	$\Rightarrow b = -9$
$10 = a + 4b + 8c$	$\Rightarrow c = 3$
$16 = a + 6b + 24c + 48d$	$\Rightarrow d = -1/2$

$$\begin{aligned} f(x) &= 22 - 9(x+2) + 3[(x+2)x] - \frac{1}{2}[(x+2)x](x-2) \\ &= 22 - 9x - 18 + 3x^2 + 6x - \frac{1}{2}[x^2 + 2x](x-2) \\ &= 3x^2 - 3x + 4 - \frac{1}{2}[x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x] \\ &= 3x^2 - 3x + 4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - x + 4}$



d) **Standardansatz** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\downarrow$ Gauß-Algorithmus	$\begin{array}{rrcr} -27a + & 9b - & 3c + & 1d = & -5 \\ -1a + & 1b - & 1c + & 1d = & 2 \\ 8a + & 4b + & 2c + & 1d = & -4 \\ 125a + & 25b + & 5c + & 1d = & 23 \end{array}$
	$\begin{array}{rrcr} -27a + & 9b - & 3c + & 1d = & -5 \\ & -18b + & 24c - & 26d = & -59 \\ & 22\frac{1}{2}b + & 3\frac{3}{4}c + & 4\frac{3}{8}d = & -18\frac{1}{2} \\ & 14\frac{2}{5}b - & 1\frac{23}{25}c + & 1\frac{27}{125}d = & -\frac{4}{125} \end{array}$
	$\begin{array}{rrcr} -27a + & 9b - & 3c + & 1d = & -5 \\ & -18b + & 24c - & 26d = & -59 \\ & & 27c - & 22\frac{1}{2}d = & -73\frac{4}{5} \\ & & 21\frac{3}{5}c - & 24\frac{12}{25}d = & -59\frac{1}{25} \end{array}$
	$\begin{array}{rrcr} -27a + & 9b - & 3c + & 1d = & -5 \\ & -18b + & 24c - & 26d = & -59 \\ & & 27c - & 22\frac{1}{2}d = & -73\frac{4}{5} \\ & & & 8\frac{1}{10}d = & 0 \end{array}$
	$\Rightarrow d = 0 \Rightarrow c = -\frac{41}{15} \Rightarrow b = -\frac{11}{30} \Rightarrow a = \frac{11}{30}$

$\downarrow$ Additionsverfahren	$\begin{array}{rrcr} -27a + & 9b - & 3c + & 1d = & -5 & \textcircled{1} \\ -1a + & 1b - & 1c + & 1d = & 2 & \textcircled{2} \\ 8a + & 4b + & 2c + & 1d = & -4 & \textcircled{3} \\ 125a + & 25b + & 5c + & 1d = & 23 & \textcircled{4} \end{array}$	
	$\begin{array}{rrcr} -26a + & 8b - & 2c & & = & -7 & \textcircled{5}=\textcircled{1}-\textcircled{2} \\ 9a + & 3b + & 3c & & = & -6 & \textcircled{6}=\textcircled{3}-\textcircled{2} \\ 152a + & 16b + & 8c & & = & 28 & \textcircled{7}=\textcircled{4}-\textcircled{1} \end{array}$	
	$\begin{array}{rrcr} -78a + & 24b - & 6c & & = & -21 & \textcircled{5}=3\cdot\textcircled{5} \\ 18a + & 6b + & 6c & & = & -12 & \textcircled{6}=2\cdot\textcircled{6} \\ 114a + & 12b + & 6c & & = & 21 & \textcircled{7}=3/4\cdot\textcircled{7} \end{array}$	
	$\begin{array}{rrcr} -60a + & 30b & & & = & -33 & \textcircled{8}=\textcircled{5}+\textcircled{6} \\ 36a + & 36b & & & = & 0 & \textcircled{9}=\textcircled{5}+\textcircled{7} \end{array}$	
	$\begin{array}{rrcr} 20a - & 10b & & & = & 11 & \textcircled{8}=-1/3\cdot\textcircled{8} \\ 10a + & 10b & & & = & 0 & \textcircled{9}=5/18\cdot\textcircled{9} \end{array}$	
	$\begin{array}{rrcr} 30a & & & & = & 11 & \textcircled{10}=\textcircled{8}+\textcircled{9} \end{array}$	
	$\Rightarrow a = \frac{11}{30} \Rightarrow b = -\frac{11}{30} \Rightarrow c = -\frac{41}{15} \Rightarrow d = 0$	

$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{11}{30}x^3 - \frac{11}{30}x^2 - \frac{41}{15}x}$



Newton-Ansatz $f(x) = a + b(x+3) + c(x+3)(x+1) + d(x+3)(x+1)(x-2)$

$$-5 = a$$

$$2 = a + 2b$$

$$\Rightarrow b = 7/2$$

$$-4 = a + 5b + 15c$$

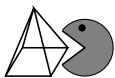
$$\Rightarrow c = -11/10$$

$$23 = a + 8b + 48c + 144d$$

$$\Rightarrow d = 11/30$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -5 + \frac{7}{2}(x+3) - \frac{11}{10}[(x+3)(x+1)] + \frac{11}{30}[(x+3)(x+1)(x-2)] \\ &= -5 + \frac{7}{2}x + \frac{21}{2} - \frac{11}{10}[x^2 + 4x + 3] + \frac{11}{30}[x^2 + 4x + 3](x-2) \\ &= -5 + \frac{7}{2}x + \frac{21}{2} - \frac{11}{10}x^2 - \frac{22}{5}x - \frac{33}{10} + \frac{11}{30}[x^3 + 4x^2 + 3x - 2x^2 - 8x - 6] \\ &= -\frac{11}{10}x^2 - \frac{9}{10}x + \frac{11}{5} + \frac{11}{30}[x^3 + 2x^2 - 5x - 6] \\ &= -\frac{11}{10}x^2 - \frac{9}{10}x + \frac{11}{5} + \frac{11}{30}x^3 + \frac{11}{15}x^2 - \frac{11}{6}x - \frac{11}{5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{11}{30}x^3 - \frac{11}{30}x^2 - \frac{41}{15}x}$$



e) **Standardansatz** $f(x) = ax^2 + bx + c$

Gauß-Algorithmus	$4a - 2b + 1c = 8$
	$4a + 2b + 1c = -4$
	$1c = 1$
	$4a - 2b + 1c = 8$
	$-4b = 12$
	$1c = 1$
	$\Rightarrow c = 1 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow a = 1/4$

Additionsverfahren	$4a - 2b + 1c = 8$ ①
	$4a + 2b + 1c = -4$ ②
	$1c = 1$ ③ in ①, ②
	$8a = 2$ ④=①+②
	$\Rightarrow c = 1 \Rightarrow a = 1/4 \Rightarrow b = -3$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 1$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Gauß-Algorithmus	$-8a + 4b - 2c + 1d = 8$
	$8a + 4b + 2c + 1d = -4$
	$64a + 16b + 4c + 1d = -13$
	$1d = 1$
	$-8a + 4b - 2c + 1d = 8$
	$8b + 2d = 4$
	$6b - 1\frac{1}{2}c + 1\frac{1}{8}d = 6\frac{3}{8}$
	$1d = 1$
	$-8a + 4b - 2c + 1d = 8$
	$8b + 2d = 4$
	$2c + \frac{1}{2}d = -4\frac{1}{2}$
	$1d = 1$
	$\Rightarrow d = 1 \Rightarrow c = -5/2 \Rightarrow b = 1/4$
	$\Rightarrow a = -1/8$

Additionsverfahren	$-8a + 4b - 2c + 1d = 8$ ①
	$8a + 4b + 2c + 1d = -4$ ②
	$64a + 16b + 4c + 1d = -13$ ③
	$1d = 1$ ④ in ①, ②, ③
	$48a + 8b = -4$ ⑤=③-2·②
	$8b = 2$ ⑥=①+②
	$\Rightarrow d = 1 \Rightarrow b = 1/4 \Rightarrow a = -1/8 \Rightarrow c = -5/2$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$

Newton-Ansatz $f(x) = a + b(x+2) + c(x+2)x$

$8 = a$
$1 = a + 2b \Rightarrow b = -7/2$
$-4 = a + 4b + 8c \Rightarrow c = 1/4$
$f(x) = 8 - \frac{7}{2}(x+2) + \frac{1}{4}[(x+2)x]$
$= 8 - \frac{7}{2}x - 7 + \frac{1}{4}[x^2 + 2x]$
$= 8 - \frac{7}{2}x - 7 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$
$= \frac{1}{4}x^2 - 3x + 1$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 1$

$f(x) = \dots + d(x+2)x(x-2)$

$\vdots$
$-13 = a + 6b + 24c + 48d \Rightarrow d = -1/8$
$f(x) = \dots - \frac{1}{8}[(x+2)x(x-2)]$
$= \dots - \frac{1}{8}[x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x]$
$= \dots - \frac{1}{8}[x^3 - 4x]$
$= \frac{1}{4}x^2 - 3x + 1 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$



10.2 Taylorpolynome

a)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin(x) \\
 f'(x) &= \cos(x) \\
 p_1(x) &= \frac{\sin(\pi)}{0!} + \frac{\cos(\pi)}{1!}(x - \pi) \\
 &= 0 - 1 \cdot (x - \pi) \\
 &= -x + \pi
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cos(x) \\
 f'(x) &= -\sin(x) \\
 f''(x) &= -\cos(x) \\
 p_2(x) &= \frac{\cos(0)}{0!} - \frac{\sin(0)}{1!}(x - 0) - \frac{\cos(0)}{2!}(x - 0)^2 \\
 &= 1 - 0 - \frac{1}{2}x^2 \\
 &= -\frac{1}{2}x^2 + 1
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{x} \\
 f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 p_1(x) &= \frac{\sqrt{2}}{0!} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1!}(x - 2) \\
 &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x - 2) \\
 &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$



d)

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{-2x} \\f'(x) &= -2e^{-2x} \\f''(x) &= 4e^{-2x} \\p_2(x) &= \frac{e^0}{0!} - \frac{2e^0}{1!}(x-0) + \frac{4e^0}{2!}(x-0)^2 \\&= 1 - 2x + 2x^2 \\&= 2x^2 - 2x + 1\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{-x^2} \\f'(x) &= -2xe^{-x^2} \\f''(x) &= -2e^{-x^2} - 2x \cdot (-2x)e^{-x^2} = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2} \\f'''(x) &= 8xe^{-x^2} + (4x^2 - 2)(-2x)e^{-x^2} = 8xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2} + 4xe^{-x^2} = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2} \\f^{(4)}(x) &= (-24x^2 + 12)e^{-x^2} + (-8x^3 + 12x)(-2x)e^{-x^2} = \dots = (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2} \\p_4(x) &= \frac{1}{0!} + \frac{0}{1!}(x-0) - \frac{2}{2!}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3 + \frac{12}{4!}(x-0)^4 \\&= 1 + 0 - x^2 + 0 + \frac{1}{2}x^4 \\&= \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}f(x) &= e^x = \dots = f^{(n)}(x) = e^x \\p_2(x) &= \frac{e}{0!} + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 \\&= e + ex - e + \frac{e}{2}(x^2 - 2x + 1) \\&= \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{2}\end{aligned}$$

Index

Ableitung, 1
achsensymmetrisch, 8
Addition, 1
Additionsverfahren, 2
Anschlussstelle, 9
Approximation, 4
approximieren, 5

differenzierbar, 1, 8, 9
Dreiecksform, 3
Dreieckssystem, 2

Eulersche Zahl, 4

Funktionsgrad, 1

Gauß-Algorithmus, 2
Genauigkeit, 5
Gerade, 1
Gesamtkrümmung, 8
Gleichungssystem, 1, 3

Interpolation, 1
Interpolationspolynom, 8
interpolieren, 1
Intervall, 6

knickfrei, 9
Koeffizient, 1
Krümmung, 9

Multiplikation, 1

Newton, Isaac, 2

Parabel, 1
Parameter, 3
Polynom, 1
Potenz, 1

Rechenaufwand, 2

Spline, 8
Spline-Interpolation, 8
Sprungstelle, 9
Stützpolynom, 2–4
 Newton'sches, 2
Stützpunkte, 1

Stützstelle, 2
Standardansatz, 1
 allgemein, 2
stetig, 8, 9
Summand, 4

Taylor, Brook, 7
Taylorpolynom, 6

ungekrümmt, 9