

Übungen rund um das Skalarprodukt



1. Berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte.

(a) $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3a \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Wie muss der Parameter a gewählt werden, wenn die folgenden Gleichungen gelten sollen?

(a) $\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = 0$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = 1$

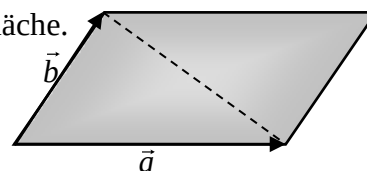
(c) $\begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \right] = 6$

3. Flächeninhalt eines Parallelogramms:

Spannen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Parallelogramm auf, so gilt für dessen Flächeninhalt A die Formel: $A = \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$. Mit $\frac{1}{2} A$ erhält man die Dreiecksfläche.

Beispiel: Gegeben ist ein Parallelogramm mit den Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Daraus folgt für den Flächeninhalt:



$$A = \sqrt{\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{\vec{a}^2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{\vec{b}^2} - \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}^2}_{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}$$

$$= \sqrt{[1+4+9] \cdot [4+16+1] - [2+8+3]^2}$$

$$= \sqrt{14 \cdot 21 - 13^2}$$

$$\approx 11,18 \text{ FE}$$

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(1|2|5)$, $B(4|5|1)$ und $C(-2|6|2)$.

(b) Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt der dreiseitigen Pyramide mit den Eckpunkten $A(3|3|0)$, $B(1|1|4)$, $C(6|0|2)$ und $D(4|4|3)$.

4. Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC einen rechten Winkel besitzt oder ob es für einen Wert von k einen rechten Winkel besitzen könnte.

(a) $A(2|2|0)$

(b) $A(5|1|2)$

(c) $A(-2|-2|0)$

$B(1|4|2)$

$B(2|4|2)$

$B(-2|4|0)$

$C(-1|4|0,5)$

$C(-1|1|2)$

$C(0|0|k)$

Lösungen:

1a) -2 b) $a^2 + a$ c) 0 d) -1

2a) -1 b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{4}$

3a) $A = \sqrt{232,75} \approx 15,26$ FE

3b) $A_{ABD} + A_{BCD} + A_{ACD} + A_{ABC} = \sqrt{50} + \sqrt{93,5} + \sqrt{51,5} + \sqrt{116} \approx 34,69$ FE

4a) kein rechter Winkel b) $\beta = 90^\circ$ c) $\gamma = 90^\circ$ für $k = \pm 2$