

Der Schattenwurf



Wir befinden uns im positiven Koordinatenraum. Ein ganz dünner Turm (Höhe 5 LE) steht in der xy -Ebene. Seine Spitze befindet sich bei $P(4|6|5)$. Auf den Turm fällt der Einfachheit halber paralleles Licht in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Konstruiere das Schattenbild des Turmes rechnerisch!

Lösungsweg:

1. Wir bestimmen die Gerade g eines Lichtstrahls durch den Punkt P mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$:
 $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dort, wo die Gerade auf die Wand des „Koordinatenraumes“ trifft, hört der Schatten auf.

2. Wir vermuten beispielsweise, dass der Lichtstrahl (hier: die Gerade) zuerst auf den Fußboden (xy -Ebene) trifft. Dazu lösen wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x = 4 - r \\ y = 6 - r \\ 0 = 5 - r \end{cases} \quad (\text{Anmerkung: In der } xy\text{-Ebene gilt } z = 0)$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich, dass $r = 5$ ist. Einsetzen in die anderen beiden Gleichungen führt zu dem Spurpunkt: $S_{xy}(-1|1|0)$. Dieser Punkt liegt jedoch außerhalb des positiven Koordinatenraumes und normalerweise durchbricht ein Schatten keine Wand ;-). Die Vermutung war also falsch!

Versuchen wir es stattdessen mit der yz -Ebene. Hier gilt $x = 0$. Dadurch ergibt sich:

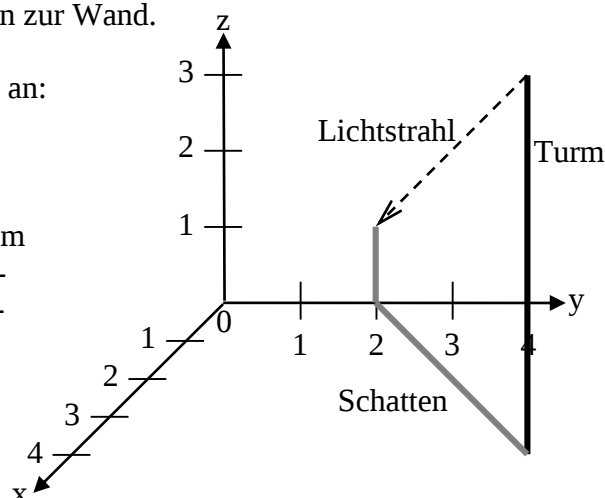
$$\begin{cases} 0 = 4 - r \\ y = 6 - r \\ z = 5 - r \end{cases} \quad \text{Für } r = 4 \text{ (siehe erste Gleichung) folgt daraus } S_{yz}(0|2|1). \text{ Dieser Punkt liegt innerhalb des positiven Koordinatenraumes. } \odot$$

3. Wir bestimmen den Fußpunkt des Lotes von S_{yz} auf die y -Achse: $S_y(0|2|0)$. An dieser Stelle geht der Schatten vom Boden zur Wand.

4. Wir fertigen eine Zeichnung an:

Anmerkung:

Solche Berechnungen werden zum Beispiel von Computergrafikprogrammen verwendet, um realistische Bilder zu erzeugen.



- ① Im positiven Koordinatenraum steht ein Rechteck. Es hat die Eckpunkte $A(3|2|0)$, $B(3|4|0)$, $C(3|4|4)$ und $D(3|2|4)$. In Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ fällt paralleles Licht auf das Rechteck. Konstruiere das Schattenbild rechnerisch!
- ② Von einem Würfel sind drei Eckpunkte gegeben: $A(5|2|0)$, $B(5|4|0)$, $C(3|4|0)$.
- Welche Kantenlänge hat der Würfel?
 - Ergänze die fehlenden Eckpunkte.
 - Zeichne den Würfel in ein 3D-Koordinatensystem.
 - Auf den Würfel fällt paralleles Licht in Richtung $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Konstruiere das Schattenbild des Würfels rechnerisch.