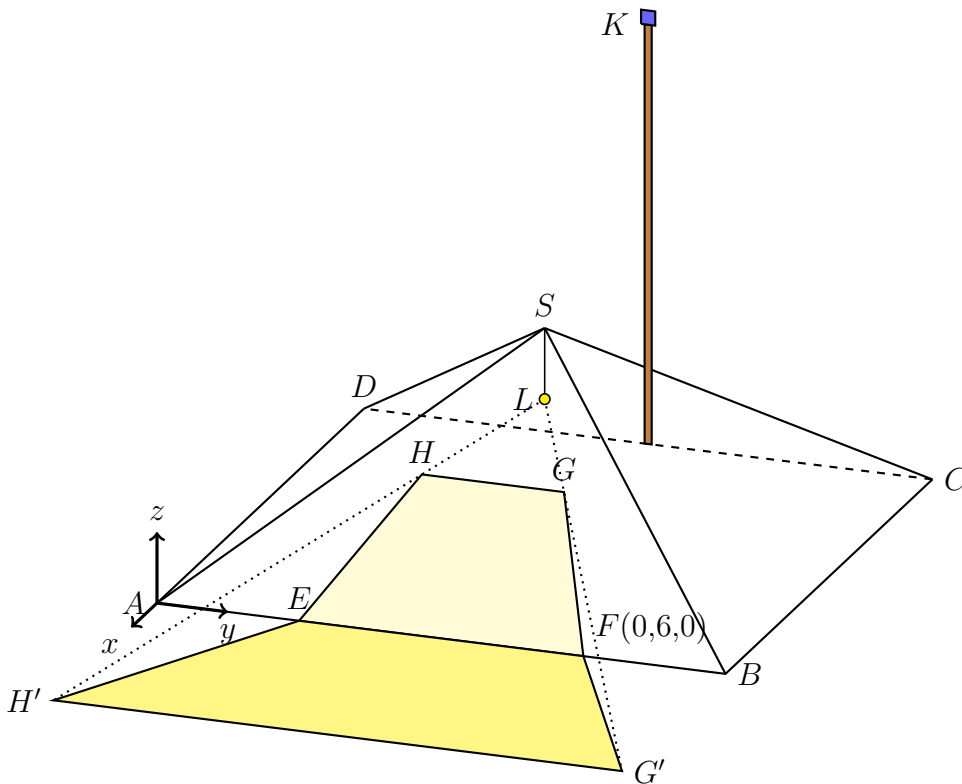




Aufgabenstellung



Gegeben ist obige quadratische Pyramide mit 8 m Breite und 3 m Höhe. Den Eingang bildet das Trapez $EFGH$ mit $|EF| = 4\text{ m}$ und G bzw. H als Mitten der Strecken $\overline{FS}$ bzw. $\overline{ES}$.

- Wie groß ist der Eingangsbereich $EFGH$?
- Ein Meter unter der Zeltspitze S befindet sich die Lichtquelle L . Durch den Eingang fällt Licht nach außen und begrenzt so die beleuchtete Fläche $EH'G'F$. Wie groß ist sie?
- In der Mitte der hinteren Zeltkante $\overline{CD}$ ist auf einer senkrechten Stange eine Kamera K angebracht. In welcher Höhe muss sie sich befinden, wenn sie die gesamte beleuchtete Fläche überwachen soll?
- Wie ändert sich die beleuchtete Fläche, wenn die Lichtquelle weiter nach oben bzw. weiter nach unten positioniert wird? Welche Grenzflächen ergeben sich, wenn sich die Lichtquelle in S bzw. in $1,5\text{ m}$ Höhe befindet?



Lösung

- a) Zuerst bestimmen wir die Koordinaten der eingezeichneten Punkte: $A(0|0|0)$, $B(0|8|0)$, $C(-8|8|0)$, $D(-8|0|0)$, $E(0|2|0)$, $F(0|6|0)$ und $S(-4|4|3)$.

Nun kümmern wir uns um die Berechnung der Punkte H und G . Zuerst kommt H :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ES} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix} \Rightarrow H(-2|3|1,5) \text{ und jetzt } G:$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \Rightarrow G(-2|5|1,5).$$

Um die Eingangsfläche zu berechnen, ergänzen wir noch den Mittelpunkt $M_{EF}(0|4|0)$ der Strecke $\overline{EF}$ und den Mittelpunkt $M_{HG}(-2|4|1,5)$ der Strecke $\overline{HG}$. Mit den beiden Mittelpunkten lässt sich nämlich leicht die Höhe des Trapezes berechnen:

$$h = \left| \overrightarrow{M_{EF}M_{HG}} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} \right| = 2,5 \text{ m}$$

Damit ergibt sich für die Eingangsfläche folgende Rechnung:

$$\frac{1}{2} \left(\left| \overrightarrow{EF} \right| + \left| \overrightarrow{HG} \right| \right) \cdot h = \frac{1}{2} (4 + 2) \cdot 2,5 = 7,5 \text{ m}^2.$$

Anmerkung: Die Höhe des Eingangstrapezes $EFGH$ ist **nicht** $\left| \overrightarrow{EH} \right| \approx 2,69$, da die Höhe immer senkrecht auf der Grundseite steht. Leider ist hier $\angle FEH \neq 90^\circ$.

- b) Die Lichtquelle befindet sich im Punkt $L(-4|4|2)$, da sie einen Meter unter der Zeltspitze S hängt. Verlängern wir nun den Lichtstrahl von L nach H dann schneidet

$$\text{dieser die } xy\text{-Ebene in } H': \overrightarrow{OH'} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H'(4|0|0).$$

Ebenso verfahren wir mit dem Lichtstrahl von L in Richtung G :

$$\overrightarrow{OG'} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow G'(4|8|0).$$

Um die Höhe der beleuchteten Trapezfläche zu berechnen, benötigen wir noch den Mittelpunkt $M_{H'G'}(4|4|0)$.

$$\text{Und damit beträgt hier die Höhe } h = \left| \overrightarrow{M_{EF}M_{H'G'}} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 4 \text{ m}.$$

$$\text{Also ist die beleuchtete Fläche } \frac{1}{2} \left(\left| \overrightarrow{H'G'} \right| + \left| \overrightarrow{EF} \right| \right) \cdot h = \frac{1}{2} (8 + 4) \cdot 4 = 24 \text{ m}^2 \text{ groß.}$$

- c) Wenn man die Gerade durch M_{EF} und S nach hinten verlängert und $x = -8$ setzt, dann erhält man die Mindesthöhe, die die Kamera K haben muss:

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow K = (-8|4|6)$$



- d) Wenn die Lampe weiter nach oben gebracht wird, dann verkleinert sich der beleuchtete Außenbereich. Wenn sich die Lampe in der Zeltspitze S befindet, dann wird nur das Zeltinnere ausgeleuchtet (Lichtreflexionen sind mal ausgeschlossen). Wird die Lampe tiefer aufgehängt, dann vergrößert sich der ausgeleuchtete Außenbereich und geht im Grenzfall gegen Unendlich, da die Lichtstrahlen bei einer Höhe von $1,5\text{ m}$ auch parallel zur xy -Ebene verlaufen.

Anmerkung: Es handelt sich bei dieser Aufgabe übrigens um eine Zentralprojektion und nicht um eine Parallelprojektion.