

Matrizen und lineare Abbildungen

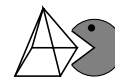
Marcus Ivens

19. Mai 2017



Inhaltsverzeichnis

1 Die Matrix	3
1.1 Besondere Matrizen	3
1.2 Vektoren	4
2 Rechnen mit Matrizen	4
2.1 Die Addition von Matrizen	4
2.2 Vervielfachung von Matrizen	4
2.3 Die Multiplikation von Matrizen	5
2.4 Rechengesetze für Matrizen	6
2.5 Übungsaufgaben	7
3 Die Determinante einer Matrix	8
4 Die Inverse einer Matrix	11
5 Das Lösen linearer Gleichungssysteme mit Matrizen	13
6 Verschlüsselung von Texten mit Matrizen	15
7 Lineare Abbildungen	17
7.1 Spiegelungen	17
7.1.1 Orthogonale Spiegelung an der x -Achse	17
7.1.2 Orthogonale Spiegelung an der y -Achse	18
7.1.3 Spiegelung im Raum	19
7.1.4 Übungsaufgaben	22
7.2 Drehung um den Koordinatenursprung	23
7.3 Zentrische Streckung	25
7.4 Projektion	25
7.4.1 Projektion auf eine beliebige Ebene	27
7.4.2 Übungsaufgaben	30
7.5 Hintereinanderausführung von Abbildungen	30
7.6 Flächeninhalte	31
8 Eigenschaften linearer Abbildungen	31
8.1 Bildmenge	31
8.2 Kern	32
8.3 Fixpunktmenge	33
8.4 Eigenvektoren und Eigenwerte	33
8.5 Übungsaufgaben	35
9 Lösungen zu den Übungsaufgaben	36
10 Stichwortverzeichnis	41



1 Die Matrix

Zuerst müssen wir klären, was wir unter einer Matrix verstehen wollen. Dazu die Definition:



Definition 1

Eine Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten ($m, n \in \mathbb{N}$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ ist das Element in Zeile i und Spalte j ($i, j \in \mathbb{N}$).

Ein praktisches Beispiel wäre eine Entfernungstabelle wie man sie aus Atlanten kennt:

	Aachen	Bremen	Frankfurt/Main	München
Luftlinie (km) → ↑				
Aachen	0	316	198	494
Bremen	316	0	330	583
Frankfurt/Main	198	330	0	305
München	494	583	305	0

In Matrixschreibweise: $A = \begin{pmatrix} 0 & 316 & 198 & 494 \\ 316 & 0 & 330 & 583 \\ 198 & 330 & 0 & 305 \\ 494 & 583 & 305 & 0 \end{pmatrix}$

1.1 Besondere Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Die Matrix B ist eine gewöhnliche **quadratische Matrix**. Sie besitzt genauso vielen Zeilen wie Spalten. A und C sind **symmetrische Matrizen**. Matrix D ist eine **Nullmatrix** und E eine **Einheitsmatrix**. F ist eine **diagonale Matrix** und G eine **obere Dreiecksmatrix**.



1.2 Vektoren

Die bisher kennengelernten (Spalten-)Vektoren sind übrigens auch besondere Matrizen: nämlich $m \times 1$ -Matrizen ($m \in \mathbb{N}$).

2 Rechnen mit Matrizen

Für das Rechnen mit Matrizen gelten ähnliche Gesetze wie für die reellen Zahlen. Welche das sind und welche nicht für Matrizen gelten wird im Folgenden näher betrachtet.

2.1 Die Addition von Matrizen

Zwei Matrizen mit der gleichen **Ordnung**, das heißt beide haben gleich viele Zeilen und gleich viele Spalten, können elementweise addiert werden.



Definition 2



A und B seien zwei $m \times n$ Matrizen. Dann gilt: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$



Beispiel 1



Gegeben sind die beiden 2×3 -Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -7 \\ 8 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. Da beide Matrizen die gleiche Ordnung haben, können sie addiert werden: $A + B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 12 & -3 & 15 \end{pmatrix}$

Für die Addition gilt übrigens auch das Kommutativgesetz. Das heißt die Reihenfolge kann bei der Addition vertauscht werden. Später werden wir sehen, dass das für die Multiplikation im Allgemeinen jedoch nicht gilt.

2.2 Vervielfachung von Matrizen

Das r -fache einer Matrix erhält man, indem man jedes Element der Matrix mit $r \in \mathbb{R}$ multipliziert.



Definition 3



Gegeben ist eine Matrix A und ein Faktor $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $r \cdot A = (r \cdot a_{ij})$

Gegeben sei die 2×3 -Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$. Dann ist $1,5 \cdot A = \begin{pmatrix} 1,5 & 3 & 4,5 \\ 6 & -7,5 & 9 \end{pmatrix}$.

Nicht jede Matrix kann mit jeder anderen Matrix multipliziert werden. Die Anzahl der Spalten der ersten Matrix (1. Faktor) muss mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix (2. Faktor) übereinstimmen. Also, wenn die erste Matrix A eine $m \times n$ -Matrix ist, dann muss die zweite Matrix B eine $n \times k$ -Matrix sein, wenn diese miteinander multipliziert werden sollen ($m, n, k \in \mathbb{N}$). Das Produkt ist dann eine $m \times k$ -Matrix.





Die Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen *nicht* kommutativ: $A \cdot B \neq B \cdot A$. Es gibt jedoch Ausnahmen: Beispielsweise ist die Multiplikation von zwei Diagonalmatrizen kommutativ.

Ein konkretes Beispiel: Wir wollen die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ in dieser Rei-

henfolge miteinander multiplizieren. A ist eine 2×3 -Matrix und B eine 3×2 -Matrix. Die Anzahl der Spalten der ersten Matrix stimmt mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix überein. Wir können also beide Matrizen miteinander multiplizieren und erhalten als Ergebnis eine 2×2 -Matrix. Zur Berechnung hat sich das falksche Schema (benannt nach Sigurd Falk) bewährt:

Diagram illustrating the row reduction process for the augmented matrix $[A | C]$.

The initial augmented matrix is:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 4 & 1 \\ & & & 3 & -7 \\ & & & -2 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 & c_{11} & c_{12} \\ -4 & 6 & 5 & c_{21} & c_{22} \end{array}$$

The process shows the first row of A being used to eliminate the first column of the bottom two rows of A . This results in two new rows for A , with the first column of the bottom two rows of C being updated to c_{11} and c_{21} respectively.



Um beispielsweise c_{11} zu berechnen, wird das Skalarprodukt der *ersten Zeile* der Matrix A mit der *ersten Spalte* der Matrix B berechnet: $c_{11} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 4$. Für c_{12} wird das Skalarprodukt der *ersten Zeile* der Matrix A mit der *zweiten Spalte* der Matrix B berechnet: $c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-7) + 3 \cdot 6 = 5$. $c_{21} = -4 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = -8$ und $c_{22} = -4 \cdot 1 + 6 \cdot (-7) + 5 \cdot 6 = -16$ werden entsprechend berechnet.

Beispiel 3

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Dann ist das Produkt $C =$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}$$

			4	1
			3	-7
			-2	6
1	2	3	4	5
-4	6	5	-8	-16

Wird die Reihenfolge der Faktoren vertauscht, dann erhalten wir als Ergebnismatrix:

$$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 14 & 17 \\ 31 & -36 & -26 \\ -26 & 32 & 24 \end{pmatrix}$$

			1	2	3
			-4	6	5
4	1		0	14	17
3	-7		31	-36	-26
-2	6		-26	32	24

An diesem Beispiel sieht man auch, dass $A \cdot B \neq B \cdot A$ ist!

2.4 Rechengesetze für Matrizen

Satz 1: Rechengesetze

Es seien A eine $m \times n$ -Matrix, B auch eine $m \times n$ -Matrix, C eine $n \times k$ -Matrix und D eine $k \times p$ -Matrix mit $m, n, k, p \in \mathbb{N}$ und $r, s \in \mathbb{R}$. Dann gelten u.a. folgende Gesetze:

[1.] $A + B = B + A$ *Kommutativgesetz der Addition*

[2.] $r \cdot A + s \cdot A = (r + s) \cdot A$ *Distributivgesetz*

[3.] $(B \cdot C) \cdot D = B \cdot (C \cdot D)$ *Assoziativgesetz*

[4.] $(r \cdot B) \cdot (s \cdot C) = (r \cdot s) \cdot (B \cdot C)$ *Assoziativgesetz*

[5.] $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ *Distributivgesetz*

Anmerkung: Normalerweise müssen Sätze in der Mathematik bewiesen werden. In diesem Dokument wird jedoch darauf verzichtet, da es den Rahmen sprengen würde.



2.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Summe, Differenz oder das Produkt folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

- | | | | | |
|------------|------------|------------|----------------|----------------|
| a) $A + B$ | c) $A - B$ | e) $C + A$ | g) $A \cdot B$ | i) $A \cdot C$ |
| b) $B + A$ | d) $B - A$ | f) $B - C$ | h) $B \cdot A$ | j) $C \cdot B$ |

Beachten Sie, dass die Addition bzw. Subtraktion nur bei Matrizen gleicher Dimension durchgeführt werden kann! Auch eine Multiplikation ist nicht immer definiert.

Lsg. auf S. 36

Hinweise zur Benutzung des Taschenrechners CASIO *fx-991DE PLUS*

Über **MODE** **6** können bis zu drei Matrizen: MatA, MatB, MatC eingegeben werden. Nach der Auswahl einer Matrix muss noch die Dimension festgelegt werden. Die Eingabe von Werten erfolgt wie gewohnt und wird jeweils mit **=** abgeschlossen. Anschließend verlässt wieder man den Eingabemodus mit **AC** und kann mit den eingegebenen Matrizen Berechnungen durchführen. Beispielsweise berechnet die Eingabe **SHIFT** **4** **3** **×** **SHIFT** **4** **4** **=** das Produkt der Matrizen A und B. Die Summe und die Differenz kann man ebenfalls berechnen, indem man den Operator **×** entsprechend austauscht.



3 Die Determinante einer Matrix

Jedem Vektor wurde bisher eindeutig eine Zahl zugeordnet, nämlich seine Länge. Jeder *quadratischen* Matrix kann ebenfalls eindeutig eine Zahl zugeordnet werden: ihre Determinante. In der Schule reichen in der Regel Determinanten für 2×2 - und 3×3 -Matrizen aus. Die geometrische Bedeutung spielt erst bei linearen Abbildungen eine Rolle. Daher wird hier zunächst nur gezeigt wie Determinanten berechnet werden.



Definition 4

Sei A eine 2×2 -Matrix, dann ist die Determinante

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Merkregel: „*Produkt der Hauptdiagonalen minus Produkt der Nebendiagonalen.*“

Anmerkung zur mathematischen Schreibweise: Anstatt $\det(A)$ kann auch $|A|$ verwendet werden.



Beispiel 4

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Dann ist die zugehörige Determinante $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) = 10$

Wie können wir nun die Determinante einer 3×3 -Matrix A berechnen? Hierfür bietet sich folgendes Schema an, um nicht unnötig eine lange Formel auswendig zu lernen oder in der Formelsammlung

zu suchen: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

Die ersten beiden Spalten werden einfach an die Matrix „angehängt“. Anschließend addieren wir die drei Produkte der Hauptdiagonalen und subtrahieren davon die drei Produkte der Nebendiagonalen:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \hline & & & (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) & + & & & (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) & + & & & (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) & - & & & (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}) & - & & & (a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}) & - & & & (a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}) & = \det(A) \end{array}$$

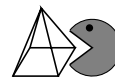


Definition 5

Sei A eine 3×3 -Matrix, dann ist die Determinante

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Merkregel: „*Die ersten beiden Spalten anhängen, dann die Produkte der Hauptdiagonalen addieren und davon die Produkte der Nebendiagonalen abziehen.*“



⚠ Nicht übertragbar!

Die beiden vorgestellten Schemata lassen sich nicht auf Matrizen höherer Ordnung übertragen! In diesen Fällen ist der Entwicklungssatz von Laplace anzuwenden, der hier jedoch nicht thematisiert wird.

Ein ausführliches Zahlenbeispiel macht es noch einmal deutlicher. Gegeben sei eine Matrix $B =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}. \text{ Auch hier hängen wir die ersten beiden Spalten hinten an die Matrix:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{matrix}. \text{ Anschließend addieren wir die drei Produkte der Hauptdiagonalen und subtrahieren davon die drei Produkte der Nebendiagonalen:}$$

$$\begin{array}{r|l} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{matrix} \\ \hline (1 \cdot 5 \cdot 9) + (2 \cdot 4 \cdot 8) + (3 \cdot 6 \cdot 7) - (8 \cdot 5 \cdot 3) - (7 \cdot 4 \cdot 1) - (9 \cdot 6 \cdot 2) = -21 \end{array}$$

Beispiel 5

Gegeben ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$. Dann ist die zugehörige Determinante

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 7 - 8 \cdot 5 \cdot 3 - 7 \cdot 4 \cdot 1 - 9 \cdot 6 \cdot 2 = -21$$

Beispiel 6

Gegeben ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Dann ist die zugehörige Determinante

$$\det(C) = -2 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 1 \cdot 5 - 5 \cdot 3 \cdot (-2) - (-2) \cdot (-1) \cdot 4 = 15$$



Aufgabe 2

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen: $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $C =$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 4 & -6 & -14 \\ -6 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

Lsg. auf S. 36

Bei den Matrizen B und C aus Aufgabe 2 fällt auf, dass sie sich nur durch die ersten beiden Zeilen unterscheiden. Diese wurden vertauscht. Wird eine Zeilen- oder Spaltenvertauschung vorgenommen, dann ändert sich bei der Determinante nur das Vorzeichen. Werden zwei Zeilen- oder Spaltenvertauschungen vorgenommen, dann ändert sich zweimal das Vorzeichen der Determinante usw.

Satz 2: Zeilen- oder Spaltenvertauschungen bei Matrizen

Werden n Zeilen- oder Spaltenvertauschungen einer Matrix vorgenommen, dann ändert sich nur das Vorzeichen der Determinante um den Faktor $(-1)^n$.

Außerdem fällt bei der Matrix D aus Aufgabe 2 auf, dass die Zeilen linear abhängig voneinander sind.

Satz 3: Linear (un-)abhängige Zeilen/Spalten

Sind zwei Zeilen oder Spalten einer Matrix **linear abhängig** voneinander, dann ist die Determinante der Matrix **Null**.

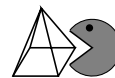
Wenn **alle** Zeilen bzw. Spalten einer Matrix **linear unabhängig** sind, dann ist die Determinante **ungleich Null**.

Satz 4: Nullzeile/-spalte

Sind alle Elemente einer Zeile oder Spalte einer Matrix Null, dann ist ihre Determinante Null.

Hinweise zur Benutzung des Taschenrechners CASIO $fx-991DE PLUS$

Zuerst muss beispielsweise die Matrix A – wie auf Seite 7 beschrieben wurde – eingegeben werden. Anschließend kann mit SHIFT 4 7 SHIFT 4 3 $)$ $=$ die Determinante der Matrix A berechnet werden.



4 Die Inverse einer Matrix

Definition 6

Eine $n \times n$ -Matrix A^{-1} heißt genau dann inverse Matrix zu A , wenn $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$ gilt, wobei E_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix ist.

Satz 5: Inverse einer Matrix

Jede (quadratische) Matrix, deren Determinante ungleich Null ist, besitzt eine Inverse. Hier gilt auch die Umkehrung: Existiert eine Inverse, dann ist die Determinante der Matrix ungleich Null.

Eine Möglichkeit die Inverse A^{-1} einer Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ zu berechnen, ist die parallele Anwendung des Gauß-Algorithmus sowohl auf die Matrix A als auch auf deren Einheitsmatrix mit der gleichen Dimension:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} | \cdot (-1) \leftarrow + \\ | \cdot \frac{1}{2} \end{array}} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{| \cdot \frac{1}{2}} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \end{array}$$

In der linken Spalte wird die Matrix A schrittweise in eine Einheitsmatrix umgewandelt. Die dazu notwendigen Operationen werden jedoch auf beide Matrizen gleichermaßen angewendet. Dabei entsteht auf der rechten Seite aus der Einheitsmatrix die gesuchte zugehörige Inverse. Hier ist:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ Wie man leicht selbst nachrechnen kann gilt } A^{-1} \cdot A = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

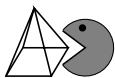
Satz 6: Inverse einer 2×2 -Matrix

Ist die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ nicht Null, dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 7

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$. Da $\det(A) = -1 \neq 0$, existiert eine Inverse: $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Da $\det(B) = 0$, existiert für diese Matrix keine Inverse; erkennbar auch an der linearen Abhängigkeit der Zeilen bzw. Spalten.

**Beispiel 8**

Gesucht ist die Inverse A^{-1} der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \begin{array}{l} | \cdot (-3) \leftarrow + \\ | \cdot (-1) \leftarrow + \\ \hline \end{array} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. | \cdot (-0,5) \\
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4,5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1,5 & -0,5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \begin{array}{l} \hline | \cdot (-1) \leftarrow + \\ \hline \end{array} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 4,5 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 1,5 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 1 \end{pmatrix} \right. | \cdot (-2) \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 4,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 1,5 & -0,5 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right. \begin{array}{l} \hline | \cdot (-4,5) \leftarrow + \\ | \cdot 0,5 \leftarrow + \\ \hline \end{array} \\
 E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 6 & -5 & 9 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right. = A^{-1}
 \end{array}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie jeweils die Inverse zu den folgenden Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$G = \begin{pmatrix} -9 & -1 & -6 \\ -7 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lsg. auf S. 36

Hinweise zur Benutzung des Taschenrechners CASIO *fx-991DE PLUS*

Nach Eingabe einer Matrix A (s. S. 7) kann mit $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{x^{-1}} \boxed{=}$ die Inverse dieser Matrix A berechnet werden.



5 Das Lösen linearer Gleichungssysteme mit Matrizen

Um das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + y + 4z &= b_1 \\3x + y + 3z &= b_2 \\x - z &= b_3\end{aligned}$$

zu lösen, gibt es verschiedene Möglichkeiten (b_1, b_2, b_3 sind hier beliebige reelle Zahlen). Bisher kennen Sie beispielsweise das Additions-/Subtraktionsverfahren und den Gauß'schen Algorithmus. Mit der Inversen einer Matrix kommt noch eine weitere Möglichkeit hinzu. Dazu schreiben wir das obige

Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix A und den zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{b}$ auf: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. Zur Erinnerung: Ziel der ganzen Verfahren ist es, $\vec{x}$ zu bestimmen. Wenn es – wie in diesem Fall – zu A eine Inverse gibt, dann können wir die Gleichung so umformen:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Multiplikation von links (!) mit der Inversen

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

führt zur Einheitsmatrix, da $A^{-1} \cdot A = E$

$$\begin{aligned}E \cdot \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b}\end{aligned}$$

Wenn die Inverse A^{-1} bekannt ist, dann kann man das Gleichungssystem also mit einer Multiplikation $A^{-1} \cdot \vec{b}$ lösen und erhält den gesuchten Vektor $\vec{x}$! Dafür müssen jedoch 2 Voraussetzungen erfüllt sein:



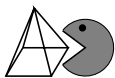
Voraussetzungen für $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

1. Die Koeffizientenmatrix A muss quadratisch sein.
2. $\det(A) \neq 0$ oder alle Zeilen/Spalten von A müssen linear unabhängig sein.

Zur Erinnerung: Geometrisch betrachtet wird hier untersucht, ob die drei Ebenen

$$\begin{aligned}E_1 : x + y + 4z &= b_1, \\ E_2 : 3x + y + 3z &= b_2 \text{ und} \\ E_3 : x - z &= b_3\end{aligned}$$

einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

**Beispiel 9**

Verwenden wir nochmal die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ aus dem Einleitungstext zu

diesem Abschnitt (Seite 13) und ergänzen die rechte Seite durch den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Die In-

verse A^{-1} ist bereits aus dem Beispiel 8 bekannt. Daher können wir $\vec{x}$ direkt berechnen: $\vec{x} =$

$$A^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 6 & -5 & 9 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 43 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme unter Verwendung der inversen Koeffizientenmatrix.

a) $\begin{vmatrix} x & +y & = 3 \\ 2x & +3y & = 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 4x & +2y & = 2 \\ 2x & -y & = 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4x & +3y & & = 1 \\ 5x & & +z & = 2 \\ 7x & +5y & & = 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -x & -y & +2z & = 3 \\ 2x & -4y & +3z & = 1 \\ x & +2y & -3z & = 2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -x & +4y & +z & = 2 \\ x & & -2z & = 3 \\ -3x & +3y & +5z & = 1 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} x & +y & +6z & = 3 \\ 2x & +3y & & = 2 \\ x & +2y & -5z & = 1 \end{vmatrix}$

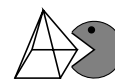
Lsg. auf S. 37

Aufgabe 5

Welche linearen Gleichungssysteme lassen sich mit der Matrizenrechnung *nicht* lösen? Lsg. auf S. 37

Hinweise zur Benutzung des Taschenrechners CASIO fx-991DE PLUS

Lineare Gleichungssysteme lassen sich am einfachsten mit **MODE** **5** **1** bzw. **2** lösen.



6 Verschlüsselung von Texten mit Matrizen

Eine nette mathematische Spielerei ist das Verschlüsseln von Texten mit Matrizen. Mithilfe der Inversen kann dann die geheime Botschaft wieder entschlüsselt werden. Dazu sind folgende Schritte notwendig:

1. Die Buchstaben werden Zahlen zugeordnet

Jedem Buchstaben aus dem Alphabet wird willkürlich eine Zahl eindeutig zugeordnet. Das muss also nicht wie hier im Beispiel sortiert erfolgen.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	␣
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Aus der Buchstabenfolge „FORMELSAMMLUNG“ wird durch die Zuordnung die Zahlenfolge 6-15-18-13-5-12-19-1-13-13-12-21-14-7. Wenn die Buchstabenanzahl ungerade ist, kann am Ende ein Leerzeichen (27) ergänzt werden.

2. Die Zahlen werden in einer Matrix A angeordnet

Die Zahlenfolge passt beispielsweise in folgende 2×7 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 18 & 13 & 5 & 12 & 19 \\ 1 & 13 & 13 & 12 & 21 & 14 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Die Chiffrierung: $C \cdot A = G$

Die Matrix A wird von links mit einer Matrix C multipliziert, wobei sowohl die Matrix C selbst als auch ihre Inverse ganzzahlig sein sollte. Selbstverständlich müssen auch die Dimensionen der beiden Matrizen passen. Mit ein bisschen Probieren findet man beispielsweise $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$ und damit $G = \begin{pmatrix} 9 & 54 & 57 & 49 & 68 & 54 & 40 \\ 35 & 203 & 215 & 184 & 251 & 202 & 153 \end{pmatrix}$. Diese „geheime“ Matrix G enthält nun die verschlüsselte Botschaft. Übrigens spricht man von Chiffrierung, wenn einzelne Zeichen ersetzt werden, und von Codierung, wenn ganze Wörter ersetzt werden.¹

4. Die Dechiffrierung: $C^{-1} \cdot G = A$

Wenn der Empfänger die geheime Botschaft in Form der Matrix G erhält, dann benötigt er nur noch die Inverse der Matrix C , um die Nachricht zu entschlüsseln. Beweis: $C^{-1} \cdot G = C^{-1} \cdot C \cdot A = E \cdot A = A$. In unserem Beispiel ist $C^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ und damit $A = \begin{pmatrix} -11 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 54 & 57 & 49 & 68 & 54 & 40 \\ 35 & 203 & 215 & 184 & 251 & 202 & 153 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 18 & 13 & 5 & 12 & 19 \\ 1 & 13 & 13 & 12 & 21 & 14 & 7 \end{pmatrix}$. Werden jetzt wieder die Einträge der Matrix den zugehörigen Buchstaben zugeordnet, dann erhalten wir den Klartext „FORMELSAMMLUNG“.

¹ Mehr zu diesem spannenden Thema findet man in dem Buch „Codes – Die Kunst der Verschlüsselung“ von Simon Singh, das im Deutschen Taschenbuch Verlag (dtv) erschienen ist.



Aufgabe 6

Entschlüsseln Sie die geheime Botschaft

$G = \begin{pmatrix} 94 & 22 & 56 & 71 & 20 & 36 & 46 & 37 & 30 & 17 & 44 \\ 349 & 81 & 212 & 263 & 75 & 141 & 173 & 136 & 111 & 65 & 168 \end{pmatrix}$ mit der obigen Zuordnungs-

tabelle und der Chiffrierungsmatrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$.

Lsg. auf S. [37](#)



7 Lineare Abbildungen

In zahlreichen Computerprogrammen (z. B. das Bildbearbeitungsprogramm GIMP) werden geometrische Objekte gedreht, gespiegelt, gestreckt usw. Anschließend werden sie auf einem Bildschirm dargestellt (auf eine Ebene projiziert). Angewendet wird diese Technik beispielsweise in Animationsfilmen, im medizinischen Bereich und bei technischen Konstruktionen. Hinter den Operationen (drehen, spiegeln,...) verbirgt sich jeweils eine Abbildungsmatrix A , die mit jedem Ortsvektor $\vec{x}$ der Originalpunkte multipliziert wird, und als Ergebnis erhält man die Ortsvektoren der zugehörigen Bildpunkte $\vec{x}'$:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{x}'$$



Definition 7

Eine Zuordnung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ wird als lineare Abbildung (oder lineare Transformation oder Homomorphismus) bezeichnet, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- [1.] Jedem Originalpunkt P aus $\mathbb{R}^m$ wird ein Bildpunkt P' aus $\mathbb{R}^n$ zugeordnet.
- [2.] Es existiert eine $n \times m$ -Matrix A (Abbildungsmatrix), sodass $A \cdot \vec{x} = \vec{x}'$ gilt. $\vec{x}$ ist dabei der Ortsvektor des Originalpunkts und $\vec{x}'$ der Ortsvektor des Bildpunkts.

Im Folgenden wollen wir uns nur mit linearen Abbildungen aus dem $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ beschäftigen.

7.1 Spiegelungen

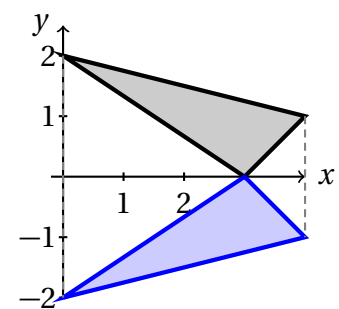
7.1.1 Orthogonale Spiegelung an der x -Achse

Bei einer orthogonalen Spiegelung an der x -Achse ändert sich bei jedem Punkt nur das Vorzeichen der y -Koordinate. Die y -Koordinate des Bildpunkts y' lässt sich daher mit der Gleichung $y' = -y$ berechnen. An der x -Koordinate ändert sich nichts, also gilt: $x' = x$. Rechts im Bild ist die Originalfigur oberhalb der x -Achse in schwarz gezeichnet und unterhalb das Spiegelbild in blau. Dabei fällt auf, dass sich der Originalpunkt $(3|0)$ bei dieser linearen Abbildung nicht ändert. Solche Punkte werden als **Fixpunkte** bezeichnet. Mehr dazu später im Kapitel 8.3. Jetzt erstmal zurück zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

Ergänzen wir noch die „unsichtbaren“ Koeffizienten:

$$\begin{aligned} x' &= 1x + 0y \\ y' &= 0x - 1y \end{aligned}$$





Jetzt können wir die Koeffizienten in einer Matrix zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

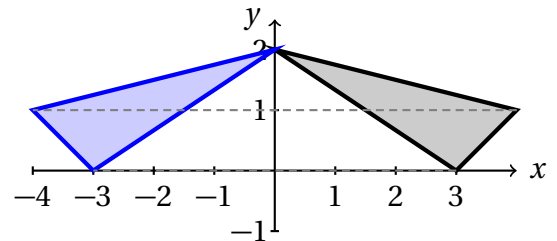
Möchten wir nun für den konkreten Eckpunkt $(4|1)$ des Dreiecks den Bildpunkt berechnen, dann müssen wir nur die Abbildungsmatrix mit dem zugehörigen Ortsvektor multiplizieren: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Auf diese Weise können wir für jeden Originalpunkt den zugehörigen Bildpunkt berechnen.

7.1.2 Orthogonale Spiegelung an der y -Achse

Die orthogonale Spiegelung an der y -Achse ist sehr ähnlich zu der orthogonalen Spiegelung an der x -Achse. Bei der orthogonalen Spiegelung an der y -Achse ändert sich bei jedem Punkt nur das Vorzeichen der x -Koordinate. Die x -Koordinate des Bildpunkts x' lässt sich daher mit der Gleichung $x' = -x$ berechnen. An der y -Koordinate ändert sich nichts, also gilt: $y' = y$.

Rechts im Bild ist die Originalfigur in schwarz gezeichnet und das Spiegelbild in blau. Dabei fällt auf, dass es – wie bei der vorherigen Zeichnung – einen Fixpunkt gibt. Der Originalpunkt $(0|2)$ ändert sich bei dieser linearen Abbildung nicht. Mehr dazu später im Kapitel 8.3. Kommen wir zurück zu dem Gleichungssystem:



$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y \end{aligned}$$

Ergänzen wir wieder die „unsichtbaren“ Koeffizienten:

$$\begin{aligned} x' &= -1x + 0y \\ y' &= 0x + 1y \end{aligned}$$

Jetzt können wir wie in dem vorherigen Beispiel die Koeffizienten in einer Matrix zusammenfassen:

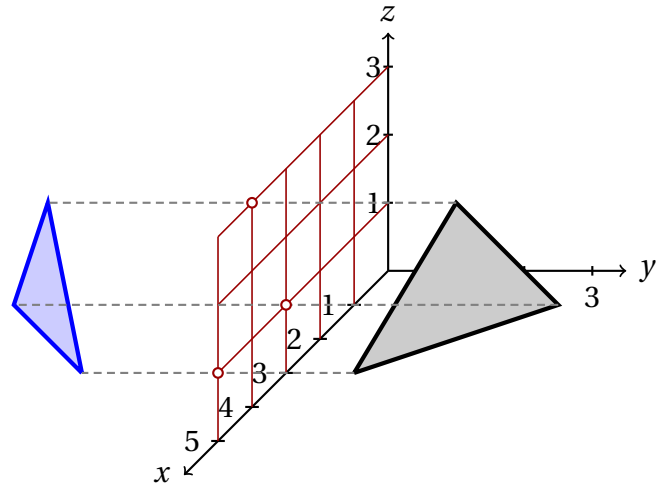
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Für eine orthogonale Spiegelung an den Koordinatenachsen im $\mathbb{R}^2$ benötigen wir also nur eine 2×2 -Einheitsmatrix, die, je nachdem an welcher Koordinatenachse gespiegelt wird, eine -1 an der passenden Stelle enthält.

Betrachten wir jetzt noch einen dreidimensionalen Fall:



Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Spiegelung an der x - z -Ebene. Die Spiegelebene wird durch das rote Gitter angedeutet. Nur aufgrund der Perspektive wird das gespiegelte Dreieck (hier wieder in blau gezeichnet) verzerrt dargestellt! Bei den drei Eckpunkten ändert sich bei dieser Spiegelung nur die y -Koordinate und sowohl die x - als auch die z -Koordinate ändern sich nicht.



Also gelten folgende Gleichungen: $x' = x$, $y' = -y$ und $z' = z$. Daher sieht die Matrixdarstellung

dieser Abbildung so aus:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Für eine Spiegelung an einer Ebene F mit der Abbildungsmatrix A gilt:

- Jeder Punkt aus F ist Fixpunkt bzw. F ist Fixpunktebene.
- Es gilt: $A \cdot A = E$ mit E als Einheitsmatrix.

7.1.3 Spiegelung im Raum

Nicht immer so einfach wie in den vorangegangenen Beispielen lässt sich eine Abbildungsmatrix bestimmen. Betrachten wir dazu beispielsweise die Ebene $F : x + y - z = 0$. Wie sieht hier eine Abbildungsmatrix aus, die alle Punkte daran spiegelt? Da man auf zwei verschiedene Arten spiegeln kann, fehlt hier noch eine wichtige Information: Wird schräg oder orthogonal (senkrecht) gespiegelt? Widmen wir uns zuerst dem orthogonalen Fall: Welche Abbildungsmatrix A führt dazu, dass alle Punkte an der Ebene F orthogonal gespiegelt werden?

Beginnen wir mit einer Geraden, die orthogonal zur Ebene F durch einen beliebigen Punkt $P(x|y|z)$

verläuft: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nun setzen wir die Gerade in die Ebene ein und lösen nach dem Parameter r auf:

$$\begin{aligned} (x + r) + (y + r) - (z - r) &= 0 \\ 3r &= -x - y + z \\ r &= \frac{1}{3} \cdot (-x - y + z) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung für den Parameter r gibt an, wie oft der Normalenvektor der Ebene F an den Ortsvektor des beliebigen Punkts gehängt werden muss, um (auf kürzestem Weg) zur Ebene F zu



kommen (zum Durchstoßpunkt). Beispielsweise wäre für den Punkt $Q(-12|0|0)$ $r = 4$. Startet man also bei Q und hängt viermal den Normalenvektor aneinander, dann landet man (wie man leicht selbst nachrechnen kann) in der Ebene F .

Der Durchstoßpunkt ist bei einer Spiegelung genau der Mittelpunkt zwischen dem ursprünglichen Punkt P und dem Bildpunkt $P'(x'|y'|z')$. Wenn man also den Vektor (Weg) von P zum Durchstoßpunkt verlängert und zwar verdoppelt, dann kommt man zum Bildpunkt P' . Das sieht als Gleichung so aus:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{3} (-x - y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Anschließend muss man nur noch die rechte Seite zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -x - y + z \\ -x - y + z \\ x + y - z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ -\frac{2}{3}x + y - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + z - \frac{2}{3}z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jetzt kann man den Vektor $\vec{x}$ ausklammern:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Damit wurde die gesuchte Abbildungsmatrix A , die alle Punkte an der Ebene F orthogonal spiegelt, gefunden. Für den Beispielpunkt Q ergibt sich als Bildpunkt $Q'(-4|8|-8)$, wegen folgender Rechnung:

$$\vec{q}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$



Beispiel 10

Die Abbildungsmatrix einer (schrägen) Spiegelung an der Ebene $F : x + y - z = 0$ in Richtung

des Vektors $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ soll bestimmt werden.

Wir beginnen wieder mit der Geraden, jedoch verwenden wir hier nicht den Normalenvektor

sondern den gegebenen Richtungsvektor: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und setzen diese in die Ebene F ein:

$(x + 4r) + (y - r) - (z + 2r) = 0$ Lösen wir dann nach dem Parameter r auf, erhalten wir: $r = -x - y + z$. Jetzt erfolgt die Berechnung des allgemeinen Bildpunkts (Verdopplung nicht vergessen, da es sich um eine Spiegelung handelt!):

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \cdot (-x - y + z) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -4x - 4y + 4z \\ x + y - z \\ -2x - 2y + 2z \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8x - 8y + 8z \\ 2x + 2y - 2z \\ -4x - 4y + 4z \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x - 8x - 8y + 8z \\ 2x + y + 2y - 2z \\ -4x - 4y + z + 4z \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -7x - 8y + 8z \\ 2x + 3y - 2z \\ -4x - 4y + 5z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -7 & -8 & 8 \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



7.1.4 Übungsaufgaben



Aufgabe 7

Beschreiben Sie die Wirkung folgender Abbildungsmatrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lsg. auf S. 37



Aufgabe 8

Bestimmen Sie jeweils eine Abbildungsmatrix aus dem $\mathbb{R}^3$ für die folgenden orthogonalen Spiegelungen an der:

a) x - y -Ebene,

b) y - z -Ebene,

c) z -Achse.

Lsg. auf S. 37



Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix einer Spiegelung:

a) Orthogonal

an $F : 2x + 2y + z = 0$

c) Orthogonal

an $F : -3x - 2y + 3z = 0$

b) in Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

an $F : -3x - 2y + 3z = 0$

d) in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

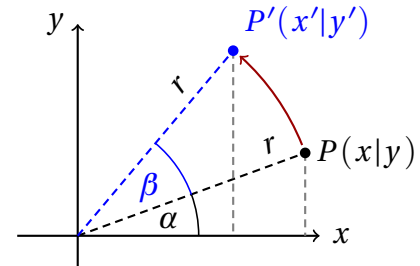
an $F : 2x + 2y + z = 0$

Lsg. auf S. 38



7.2 Drehung um den Koordinatenursprung

Wir untersuchen hier nur den zweidimensionalen Fall, also die Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Koordinatenursprung. In der nebenstehenden Zeichnung betrachten wir dazu einen beliebigen Punkt P und drehen ihn um den Winkel β um den Ursprung. Die mathematisch positive Drehrichtung verläuft entgegen des Uhrzeigersinnes! Der Bildpunkt P' ist hier wieder in blau dargestellt.



Wenn wir in diesem Fall von dem Radius r ausgehen, dann können wir die Koordinaten der beiden Punkte P und P' mit den trigonometrischen Funktionen berechnen:

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos(\alpha) \\y &= r \cdot \sin(\alpha)\end{aligned}$$

Für den Bildpunkt gilt dann Folgendes:

$$\begin{aligned}x' &= r \cdot \cos(\alpha + \beta) \\y' &= r \cdot \sin(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

Anwendung der Additionstheoreme (siehe Formelsammlung) führt zu:

$$\begin{aligned}x' &= r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\y' &= r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + r \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)\end{aligned}$$

Jetzt können wir den Term $r \cdot \cos(\alpha)$ durch x ersetzen und $r \cdot \sin(\alpha)$ durch y :

$$\begin{aligned}x' &= x \cdot \cos(\beta) - y \cdot \sin(\beta) \\y' &= y \cdot \cos(\beta) + x \cdot \sin(\beta)\end{aligned}$$

Anschließend ändern wir die Reihenfolge ein wenig:

$$\begin{aligned}x' &= \cos(\beta) \cdot x - \sin(\beta) \cdot y \\y' &= \sin(\beta) \cdot x + \cos(\beta) \cdot y\end{aligned}$$

Die Koeffizienten kann man nun als Matrix zusammenfassen:

$$\vec{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \cdot \vec{x}$$



Beispiel 11

In diesem Beispiel soll der Punkt $P(2|1)$ um 60° um den Ursprung gedreht werden (mathematisch positive Drehrichtung). Setzen wir den gegebenen Winkel in die Drehmatrix D ein, dann

ergeben sich folgende Werte: $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Die Koordinaten des Bildpunkts P' können dann so berechnet werden:

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,13 \\ 2,23 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(0,13|2,23).$$

Die Berechnung für einen Vektor, der gedreht werden soll, ist übrigens äquivalent, da bei einem Punkt schließlich mit seinem Ortsvektor gerechnet wird.



Für eine Drehung um eine Achse g mit der Abbildungsmatrix A gilt:

- Jeder Punkt der Achse g ist Fixpunkt.
- Die Spaltenvektoren sind paarweise orthogonal zueinander und haben jeweils die Länge 1.

Für die Abbildungsmatrix einer Drehung im $\mathbb{R}^3$ muss gelten: $\det(A) = 1$.

Zu einer Drehung mit dem Einheitsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ als Drehachse und dem Drehwinkel α

gehört die Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) + (v_1)^2(1 - \cos(\alpha)) & v_1 v_2(1 - \cos(\alpha)) - v_3 \sin(\alpha) & v_2 v_3(1 - \cos(\alpha)) + v_2 \sin(\alpha) \\ v_1 v_2(1 - \cos(\alpha)) + v_3 \sin(\alpha) & \cos(\alpha) + (v_2)^2(1 - \cos(\alpha)) & v_2 v_3(1 - \cos(\alpha)) - v_1 \sin(\alpha) \\ v_1 v_3(1 - \cos(\alpha)) - v_2 \sin(\alpha) & v_2 v_3(1 - \cos(\alpha)) + v_1 \sin(\alpha) & \cos(\alpha) + (v_3)^2(1 - \cos(\alpha)) \end{pmatrix}$$



Aufgabe 10

Gegeben sind der Punkt $P(3|2)$ und der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunkts P' bzw. den Bildvektor $\vec{x}'$ bei einer Drehung um

a) 30°

b) 90°

c) 120° .

Lsg. auf S. 38



Aufgabe 11

Drehen Sie das Dreieck ABC mit $A(2|1)$, $B(6|3)$, $C(5|5)$ um 45° . Berechnen Sie die Bildpunkte A' , B' und C' .

Lsg. auf S. 38



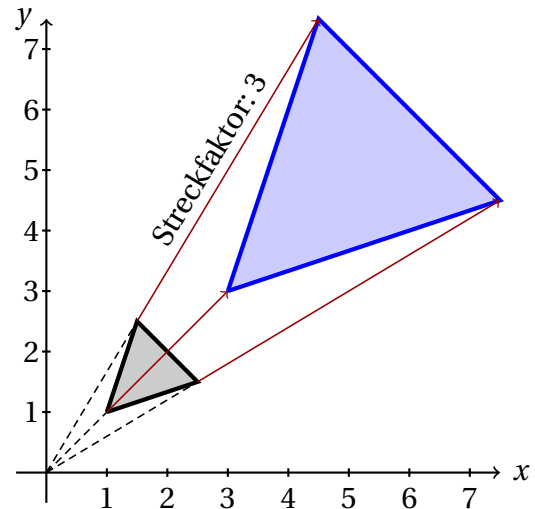
7.3 Zentrische Streckung

Die nebenstehende Zeichnung verdeutlicht die zentrische Streckung an einem Dreieck. Das Zentrum ist – wie auch bei den folgenden Aufgaben – der Koordinatenursprung. Da sowohl die x -Koordinate als auch die y -Koordinate mit dem gleichen Streckfaktor $k \in \mathbb{R}$ multipliziert werden, kann die Abbildungsmatrix A ganz leicht angegeben werden:

$A = k \cdot E$, wobei E die Einheitsmatrix ist. In unserem

konkreten Beispiel ist $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Im $\mathbb{R}^3$ wäre $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.



Die Berechnung von Bildpunkten erfolgt wie bei den Beispielen zuvor: $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$.

Aufgabe 12

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(1|1)$, $B(3|1)$, $C(1|2)$. Führen Sie eine zentrische Streckung mit Streckfaktor $k = 2$ durch. Berechnen Sie die Bildpunkte A' , B' und C' .

Lsg. auf S. 38

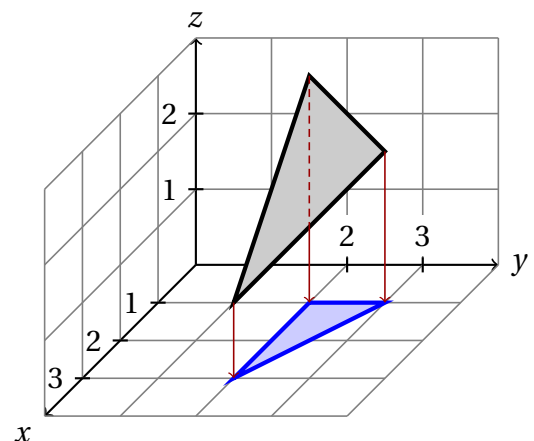
7.4 Projektion

Bei einer Projektion im $\mathbb{R}^3$ wird ein Objekt auf eine zweidimensionale Ebene abgebildet. Wir kennen das bereits aus dem Alltag: Ein Foto ist eine Projektion. Auch beim public viewing findet eine Projektion auf eine Leinwand statt. Ganz allgemein wird bei einer Projektion ein Objekt aus dem n -dimensionalen Raum auf einen $n - 1$ -dimensionalen Raum abgebildet. Das bedeutet, dass ebene Figuren im $\mathbb{R}^2$, wie zum Beispiel ein Dreieck oder ein Trapez, bei einer Projektion auf eine Gerade abgebildet werden und dann zu einer Strecke werden. Die Dimension wird also immer um eins verringert und somit geht eine Information verloren.

Betrachten wir als erstes ein dreidimensionales Beispiel: Hier wird ein Dreieck im Raum senkrecht auf die x - y -Ebene abgebildet. Dabei geht die Information über die z -Koordinate verloren. Man kann sich das in diesem Fall auch so vorstellen, dass paralleles Licht von oben auf das Dreieck fällt und darunter ein Schatten entsteht, der hier als blaues Dreieck dargestellt wird.

Da sich nur die z -Koordinate ändert, sieht die Abbildungsmatrix so aus:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.





Kommen wir nun zu einem zweidimensionalen Beispiel. Hier wird die Strecke $\overline{AB}$ mit $A(1|2)$, $B(3|3)$ auf die x -Achse projiziert. Die Projektionsrichtung ist durch den Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

Ein beliebiger Punkt $P(x|y)$ wird daher entlang der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf die x -Achse projiziert. Die Abbildungsgleichungen sehen dann so aus:

$$\begin{aligned} x' &= x + 1r \\ y' &= 0 = y - 2r \end{aligned}$$

Lösen wir die zweite Abbildungsgleichung nach r auf, dann erhalten wir: $r = 0,5y$. Jetzt können wir r in der ersten Gleichung ersetzen:

$$\begin{aligned} x' &= x + 0,5y \\ y' &= 0 \end{aligned}$$

Ergänzen wir nun die „unsichtbaren“ Koeffizienten:

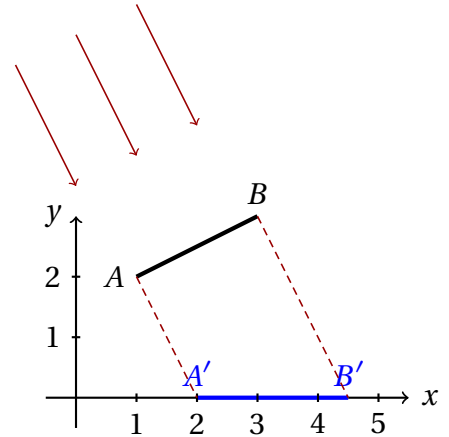
$$\begin{aligned} x' &= 1x + 0,5y \\ y' &= 0x + 0y \end{aligned}$$

In der Vektor- bzw. Matrixschreibweise:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Berechnen wir nun die Bildpunkte A' und B' :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA'} &= \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(2|0) \\ \overrightarrow{OB'} &= \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(4,5|0) \end{aligned}$$



Für die Projektion auf eine Ebene F mit der Abbildungsmatrix A gilt:

- Jeder Bildpunkt P' liegt in der Ebene F , jeder Punkt der Ebene F ist ein Fixpunkt (F ist Fixpunktebene)
- Es gilt: $A^2 = A$



7.4.1 Projektion auf eine beliebige Ebene

Ähnlich wie bei der Spiegelung im Raum (siehe Abschnitt 7.1.3) betrachten wir nun den allgemeinen Fall: Eine Projektion auf eine beliebige Ebene. Betrachten wir dazu wieder die Ebene $F : x + y - z = 0$ aus dem Einführungsbeispiel zur Spiegelung. Wie sieht bei dieser Ebene eine Abbildungsmatrix aus, die alle Punkte darauf projiziert? Da man auf zwei verschiedene Arten projizieren kann, fehlt hier noch die Information: Wird schräg oder orthogonal (senkrecht) projiziert? Widmen wir uns zuerst dem orthogonalen Fall: Welche Abbildungsmatrix A führt dazu, dass alle Punkte auf die Ebene F orthogonal projiziert werden?

Beginnen wir mit einer Geraden, die orthogonal zur Ebene F durch einen beliebigen Punkt $P(x|y|z)$

verläuft: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nun setzen wir die Gerade in die Ebene ein und lösen nach dem Parameter r auf:

$$\begin{aligned} (x + r) + (y + r) - (z - r) &= 0 \\ 3r &= -x - y + z \\ r &= \frac{1}{3} \cdot (-x - y + z) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung für den Parameter r gibt an, wie oft der Normalenvektor der Ebene F an den Ortsvektor des beliebigen Punkts gehängt werden muss, um (auf kürzestem Weg) zur Ebene F zu kommen (zum Durchstoßpunkt). Beispielsweise wäre für den Punkt $Q(-12|0|0)$ $r = 4$. Startet man also bei Q und hängt viermal den Normalenvektor aneinander, dann landet man (wie man leicht selbst nachrechnen kann) in der Ebene F .

Der Durchstoßpunkt ist bei einer Projektion bereits der Bildpunkt. Bei einer Spiegelung ist er der Mittelpunkt zwischen dem ursprünglichen Punkt P und dem Bildpunkt $P'(x'|y'|z')$. Bei einer *Spiegelung* musste man dann den Vektor verdoppeln, bei einer Projektion darf man das jedoch *nicht*! Hier ist übrigens der einzige Unterschied im Rechenweg. Bestimmen wir jetzt die Abbildungsmatrix:



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(-x - y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Anschließend muss man nur noch die rechte Seite zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -x - y + z \\ -x - y + z \\ x + y - z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{3}x + y - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + z - \frac{1}{3}z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jetzt kann man den Vektor $\vec{x}$ ausklammern:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Damit wurde die gesuchte Abbildungsmatrix A , die alle Punkte auf die Ebene F orthogonal projiziert, gefunden. Für den Beispielpunkt Q ergibt sich als Bildpunkt $Q'(-8|4|-4)$, wegen folgender Rechnung:

$$\vec{q}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$



Beispiel 12

Die Abbildungsmatrix einer (schrägen) Projektion an der Ebene $F : x + y - z = 0$ in Richtung

des Vektors $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ soll bestimmt werden.

Wir beginnen wieder mit der Geraden, jedoch verwenden wir hier nicht den Normalenvektor

sondern den gegebenen Richtungsvektor: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und setzen diese in die Ebene F ein:

$(x + 4r) + (y - r) - (z + 2r) = 0$ Lösen wir dann nach dem Parameter r auf, erhalten wir: $r = -x - y + z$. Jetzt erfolgt die Berechnung des allgemeinen Bildpunkts (auch hier *keine* Verdopplung, da es sich um eine Projektion handelt!):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (-x - y + z) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4x - 4y + 4z \\ x + y - z \\ -2x - 2y + 2z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x - 4x - 4y + 4z \\ x + y + y - z \\ -2x - 2y + z + 2z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3x - 4y + 4z \\ x + 2y - z \\ -2x - 2y + 3z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$



7.4.2 Übungsaufgaben



Aufgabe 13

Gegeben sind das Dreieck ABC mit $A(3|2|1)$, $B(2|4|0)$, $C(1|1|3)$ und der Projektionsrichtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix und berechnen Sie die Bildpunkte bei einer Projektion in die x - z -Ebene.

Lsg. auf S. 39



Aufgabe 14

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix einer Projektion:

a) Orthogonal
auf $F : 2x + 2y + z = 0$

c) Orthogonal
auf $F : -3x - 2y + 3z = 0$

b) in Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
auf $F : -3x - 2y + 3z = 0$

d) in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
auf $F : 2x + 2y + z = 0$

Lsg. auf S. 39

7.5 Hintereinanderausführung von Abbildungen



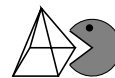
Gesamtabbildungsmatrix

Werden Abbildungen hintereinander ausgeführt, dann ergibt sich die Abbildungsmatrix für die gesamte Ausführung aus der Multiplikation der beteiligten Abbildungsmatrizen.



Beispiel 13

Wird zuerst eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor 2 durchgeführt (Abbildungsmatrix A_1) und anschließend eine Drehung um 90° (Abbildungsmatrix A_2), dann ergibt sich als Gesamtabbildungsmatrix $A = A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.



7.6 Flächeninhalte



Die Abbildungsmatrix und ihre Determinante

Die Determinante der Abbildungsmatrix $\det(A)$ gibt uns Informationen über die Änderung von Flächeninhalten: Gilt

- $\det(A) < 0$, dann ändert sich die Orientierung (wenn beispielsweise ein Dreieck gespiegelt wird)
- $0 \leq \det(A) < 1$, dann werden Flächeninhalte verkleinert
- $\det(A) = 1$, dann bleiben Flächeninhalte unverändert
- $\det(A) > 1$, dann werden sie vergrößert.

8 Eigenschaften linearer Abbildungen

Alle bisherigen linearen Abbildungen haben gemeinsam, dass der Ursprung unverändert bleibt: $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei A eine beliebige Abbildungsmatrix ist. Eine simple Verschiebung ist damit nicht zu bewerkstelligen. Dafür benötigt man eine **affine** Abbildung: $A \cdot \vec{x} + \vec{b} = \vec{x}'$. Der zusätzliche Vektor $\vec{b}$ bewirkt dieses. Wir bleiben jedoch bei den linearen Abbildungen.

Im Folgenden berechnen wir verschiedene Eigenschaften der Abbildungsmatrix, um dann eine Aussage über die geometrische Wirkung treffen zu können. Zuerst berechnen wir die **Bildmenge**, also die Menge aller Bildpunkte $(x'|y')$. Danach die Punkte, die – neben dem Ursprung selbst – auf den Koordinatenursprung $(0|0)$ abgebildet werden. Diese Menge wird als **Kern** der linearen Abbildung bezeichnet. Anschließend betrachten wir alle Punkte, die unverändert bzw. fix bleiben, die **Fixpunktmenge**. Zum Schluss berechnen wir die **Eigenvektoren** und **Eigenwerte**, da die bisherigen drei Mengen nicht immer sehr aussagekräftig sind. Doch dazu später mehr.

Für die folgenden Untersuchungen gehen wir von der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit der Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ aus.

8.1 Bildmenge

Kommen wir also zuerst zur Bildmenge, den Ort, an dem alle Bildpunkte $(x'|y')$ liegen. Dazu wird der Ortsvektor eines allgemeinen Punkts $P(x|y)$ genommen und mit der Abbildungsmatrix A multipliziert. Als Ergebnis dieser Multiplikation erhält man den Ortsvektor des Bildpunkts $P'(x'|y')$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$



Als Gleichungssystem formuliert:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = x' \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = y' \end{cases}$$

Zuerst muss man festhalten, dass hier ein inhomogenes Gleichungssystem vorliegt (die rechte Seite ist im Allgemeinen ungleich Null). Versucht man das Gleichungssystem zu lösen, stellt man fest, dass keine eindeutige Lösung möglich ist, da vier Variablen und nur zwei Gleichungen gegeben sind. Lediglich eine Beziehung zwischen x und y kann herauskommen. Addiert man nun beide Gleichungen ($0 = x' + y'$) erhält man nach einer weiteren Termumformung: $y' = -x'$ und damit als Bildmenge B der Abbildung f :

$$B_f = \{(x|y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}$$

Gelesen: Die Bildmenge B der linearen Abbildung f ist die Menge aller Punkte $(x|y)$ aus $\mathbb{R}^2$ für die $y = -x$ gilt.

Alle Bildpunkte liegen also auf der zweiten Winkelhalbierenden. Hätten wir beispielsweise den konkreten Punkt $P(1|2)$ würde dieser auf den Bildpunkt $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow P'(-\frac{1}{2}|\frac{1}{2})$ abgebildet werden. An den Koordinaten des Bildpunkts sieht man sofort, dass die Beziehung $y = -x$ erfüllt ist.

8.2 Kern

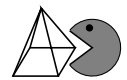
Sucht man den Kern K der linearen Abbildung f , also alle Punkte, die auf den Ursprung $(0|0)$ abgebildet werden, ergibt sich fast dasselbe Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

Hier liegt jedoch ein homogenes Gleichungssystem vor (die rechte Seite ist gleich Null), das einfacher als ein inhomogenes zu lösen ist. Die zweite Gleichung entspricht der negativen ersten Gleichung und ist damit überflüssig (redundant). Löst man daher eine der beiden Gleichungen nach y auf, erhält man: $y = x$ und damit als Kern K der Abbildung f :

$$K_f = \{(x|y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$$

Alle Punkte, die auf den Ursprung abgebildet werden, liegen also auf der ersten Winkelhalbierenden. Betrachten wir beispielsweise den konkreten Punkt $P(1|1)$, der auf der ersten Winkelhalbierenden liegt, und multiplizieren seinen Ortsvektor mit der Abbildungsmatrix A erhalten wir als Bildpunkt $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(0|0)$.



8.3 Fixpunktmenge

Als nächsten Schritt bestimmen wir die **Fixpunktmenge**, also die Menge aller Punkte, die auf sich selbst abgebildet werden. Dazu stellen wir folgendes Gleichungssystem auf:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}y & = & x \\ -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2}y & = & y \end{cases}$$

Als Ergebnis soll wieder der ursprüngliche Punkt herauskommen, also $(x|y)$! Um das Gleichungssystem zu lösen, addieren wir hier beide Gleichungen und erhalten nach einem weiteren Umformungsschritt $y = -x$. Die Fixpunktmenge entspricht also hier der Bildmenge:

$$F_f = \{(x|y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\} = B_f$$

8.4 Eigenvektoren und Eigenwerte

Die bisher vorgestellten Eigenschaften einer linearen Abbildung geben eine erste Orientierung, die jedoch manchmal nicht ausreicht. Eine weitere Möglichkeit, die Wirkung einer Abbildungsmatrix zu untersuchen, sind **Eigenvektoren** und deren **Eigenwerte**.

Jeder Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$, der auf einen kollinearen Vektor abgebildet wird, wird als Eigenvektor bezeichnet. Gesucht sind daher alle Vektoren, für die $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$ gilt mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Zur Erinnerung: zwei Vektoren sind kollinear, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist. Der Faktor, der die Vervielfachung angibt, wird hier mit dem griechischen Buchstaben λ (Lambda) bezeichnet und bekommt den Namen Eigenwert. Wie wird ein Eigenwert berechnet? Als Ansatz verwenden wir die genannte Gleichung: $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$ und ergänzen noch die Einheitsmatrix E , die die Gleichung jedoch nicht verändert (wie bei einem Produkt, das mit 1 multipliziert wird): $A \cdot \vec{x} = \lambda E \vec{x}$. Bringen wir alles auf die linke Seite und klammern $\vec{x}$ aus, dann ergibt sich:

$$A \cdot \vec{x} - \lambda E \vec{x} = (A - \lambda E) \cdot \vec{x} = 0$$

Damit die Gleichung für $\vec{x} \neq \vec{0}$ erfüllt ist, muss $\det(A - \lambda E) = 0$ sein. $\det(A - \lambda E)$ wird **charakteristisches Polynom** genannt und die Nullstellen sind die gesuchten Eigenwerte.



Betrachten wir dazu wieder die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ aus den vorherigen Beispielen:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= 0 \\ \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ \frac{1}{4} - \lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda &= 0 \\ \lambda \cdot (\lambda - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung ergeben sich zwei Eigenwerte: $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$. Diese setzen wir nun in den Ansatz ein, um die zugehörigen Eigenvektoren zu berechnen:

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= \lambda_1 \vec{x} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir erhalten hier die gleiche Lösung wie beim Kern (S. 32) der Abbildung: $y = x$ und damit alle zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ kollineare Vektoren. Nun setzen wir den zweiten Eigenwert ein:

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= \lambda_2 \vec{x} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hier erhalten wir die gleiche Lösung wie bei der Fixpunktmenge (S. 33): $y = -x$ und damit alle zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ kollineare Vektoren.

Bei der Abbildungsmatrix A handelt es sich also um eine Streckung mit dem Faktor 1 entlang der Fixgeraden $g_1 : y = -x$ und um eine Streckung mit dem Faktor 0 längs der Kerngeraden $g_2 : y = x$. Dies bedeutet eine Projektion auf die Gerade g_1 in Richtung der Geraden g_2 . Da g_2 orthogonal zu g_1 ist, liegt hier eine orthogonale Projektion auf die Gerade g_1 vor.



8.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 15

Gegeben sind die linearen Abbildung $f_{1,\dots,4} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit den Abbildungsmatrizen $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$,
 $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie jeweils die Bildmenge B_{f_i} , den Kern K_{f_i} und die Fixpunktmenge F_{f_i} für $i = 1, \dots, 4$.

Lsg. auf S. 40



9 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung 1

a) $A + B = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B + A = A + B = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A - B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 12 & -11 \end{pmatrix}$

d) $B - A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -12 & 11 \end{pmatrix}$

e) $C + A$ ist nicht definiert

f) $B - C$ ist nicht definiert

g) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -33 & 33 \\ 18 & -25 \end{pmatrix}$

h) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 15 & -34 \\ 39 & -73 \end{pmatrix}$

i) $A \cdot C = \begin{pmatrix} -23 & 38 & -29 \\ 24 & -29 & 26 \end{pmatrix}$

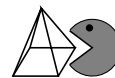
j) $C \cdot B$ ist nicht definiert

Lösung 2

$\det(A) = -7, \det(B) = 103, \det(C) = -103, \det(D) = 0$

Lösung 3

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \\ -24 & 1 & 3 \end{pmatrix}, D^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -7 \\ -2 & 2 & 3 \\ 17 & -18 & -25 \end{pmatrix},$$
$$F^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -5 & -21 \\ -2 & -1 & -4 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix}, G^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & -15 & 4 \\ 17 & -21 & 6 \\ -21 & 26 & -7 \end{pmatrix}$$



Lösung 4

$$\text{a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & -4 \\ 25 & 1 & -15 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 9 & 1 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 29 \\ 42 \\ 37 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -17 & -8 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -9 & -4 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} -47 \\ -5 \\ -25 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & 17 & -18 \\ 10 & -11 & 12 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} -29 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung 5

Mit der Matrizenrechnung lassen sich lineare Gleichungssysteme nicht lösen, die unter- oder überbestimmt sind. Es sind also weniger bzw. mehr Gleichungen als Unbekannte vorhanden. Außerdem lassen sich lineare Gleichungssysteme mit der Matrizenrechnung nicht lösen, wenn Zeilen linear abhängig sind. Positiv formuliert lassen sich also nur lineare Gleichungssysteme mit der Matrizenrechnung lösen, wenn eine eindeutige Lösung vorhanden ist.

Lösung 6

„MATHE MACHT GLUECKLICH“

Lösung 7

A: Spiegelung sowohl an der x -Achse, als auch an der y -Achse. Insgesamt eine Punktspiegelung am Koordinatenursprung.

B: Die x - und die y -Koordinate werden vertauscht, folglich ist dies eine Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden $y = x$.

C: Orthogonale Spiegelung an der y - z -Ebene.

D: Orthogonale Spiegelung an der x -Achse

Lösung 8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung 9**

$$\text{a) } r = -\frac{1}{9}(2x + 2y + z),$$

$$A = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } r = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}y + \frac{1}{3}z,$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } r = \frac{3}{22}x + \frac{1}{11}y - \frac{3}{22}z,$$

$$A = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 & 9 \\ -6 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } r = -\frac{1}{5}(2x + 2y + z),$$

$$A = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -8 & -3 & -4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Lösung 10

$$\text{a) } \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2+3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,60 \\ 3,23 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(1,60|3,23)$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+4\sqrt{3}}{2} \\ \frac{4+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,96 \\ 2,87 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(-2|3)$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3+2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-2+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3,23 \\ 1,60 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(-3,23|1,60)$$

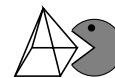
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+4\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2,87 \\ 2,96 \end{pmatrix}$$

Lösung 11

$$\text{Drehmatrix: } D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, A' \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{3\sqrt{2}}{2} \right), B' \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \mid \frac{9\sqrt{2}}{2} \right), C'(0 \mid 5\sqrt{2})$$

Lösung 12

$$\text{Abbildungsmatrix: } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A'(2|2), B'(6|2), C'(2|4)$$



Lösung 13

Aus den Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned}x' &= x + 1r \\y' &= 0 = y - 1r \\z' &= z + 0r\end{aligned}$$

folgt $r = y$ und damit

$$\begin{aligned}x' &= 1x + 1y + 0z \\y' &= 0x + 0y + 0z \\z' &= 0x + 0y + 1z\end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix sieht demnach so aus: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Für die Bildpunkte ergeben sich dann folgende Koordinaten: $A'(5|0|1)$, $B'(6|0|0)$ und $C'(2|0|3)$.

Lösung 14

$$\begin{aligned}\text{a) } r &= -\frac{1}{9}(2x + 2y + z), \\ A &= \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } r &= -\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}y + \frac{1}{3}z, \\ A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } r &= \frac{3}{22}x + \frac{1}{11}y - \frac{3}{22}z, \\ A &= \begin{pmatrix} \frac{13}{22} & -\frac{3}{11} & \frac{9}{22} \\ -\frac{3}{11} & \frac{9}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{9}{22} & \frac{3}{11} & \frac{13}{22} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d) } r &= -\frac{1}{5}(2x + 2y + z), \\ A &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$



 Lösung 15

$$B_{f_1} = \left\{ (x|y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x \right\}$$

$$K_{f_1} = \left\{ (x|y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x \right\}$$

$$F_{f_1} = \left\{ (x|y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x \right\}$$

$$B_{f_2} = \left\{ (x|y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{2}{3}x \right\}$$

$$K_{f_2} = \left\{ (x|0) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$F_{f_2} = \left\{ (x|y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{2}{3}x \right\}$$

$$B_{f_3} = \mathbb{R}^2$$

$$K_{f_3} = \left\{ (0|0) \right\}$$

$$F_{f_3} = \left\{ (0|y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$B_{f_4} = \left\{ (x|y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x \right\}$$

$$K_{f_4} = \left\{ (x|y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x \right\}$$

$$F_{f_4} = \left\{ (x|y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x \right\}$$

10 Stichwortverzeichnis

Abbildung

- affine, 31
- lineare, 17, 31

Abbildungsmatrix, 17–20, 22, 24, 25, 28, 30, 31, 33

Additionstheoreme, 23

Assoziativgesetz, 6

Bildmenge, 31

Chiffrierung, 15

Codierung, 15

Determinante, 8, 11, 31

Diagonalmatrix, 5

Dimension, 25

Distributivgesetz, 6

Drehmatrix, 24

Drehung, 23, 30

Durchstoßpunkt, 20, 27

Eigenvektor, 31, 33, 34

Eigenwert, 31, 33, 34

Einheitsmatrix, 3, 11, 13, 19, 25

Entfernungstabelle, 3

Fixgerade, 34

Fixpunkt, 17, 18, 26

Fixpunktebene, 26

Fixpunktmenge, 31, 33, 34

Gleichungssystem, 13, 14, 17, 33

- homogenes, 32

- inhomogen, 32

- lineares, 13, 14, 32

Hauptdiagonale, 8, 9

Homomorphismus, 17

Inverse, 11–13, 15

Kern, 31, 32, 34

Kerngerade, 34

Koeffizientenmatrix, 13, 14

kollinear, 33, 34

Kommutativgesetz, 6

Koordinatenursprung, 23, 25, 32

Matrix, 3

Abbildungsmatrix, 17–20, 22, 24, 25, 28, 30, 31, 33

diagonale, 3

Drehmatrix, 24

Einheitsmatrix, 3, 11, 13, 19, 25

Inverse, 11–13, 15

Koeffizientenmatrix, 13

Nullmatrix, 3

obere Dreiecksmatrix, 3

Ordnung, 4

quadratische, 3

symmetrische, 3

Matrizenmultiplikation, 5

Nebendiagonale, 8, 9

Normalenvektor, 19–21, 27, 29

Nullmatrix, 3

Nullspalte, 10

Nullzeile, 10

Ordnung, 4

Ortsvektor, 18, 19, 24, 27, 31, 32

Polynom

charakteristisches, 33

Projektion, 25, 26, 34

Projektionsrichtung, 26

Richtungsvektor, 21, 29

Schnittpunkt, 13

Skalarprodukt, 6

Spaltenvertauschung, 10

Spiegelbild, 17

Spiegelung, 17–19

Streckfaktor, 25

Streckung, 34

Verschlüsselung, 15

Winkelhalbierende, 32

Zeilenvertauschung, 10

Zentrische Streckung, 25, 30