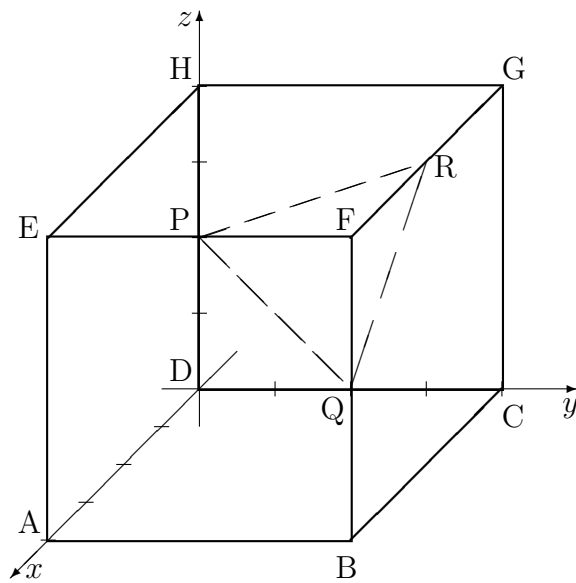


## Aufgaben

1. Gegeben sind die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und die Ebene E durch die Punkte A  $(-2|5|2)$ , B  $(2|3|0)$  und C  $(2|-1|2)$ .
  - (a) Stellen Sie eine Parametergleichung und eine Koordinatengleichung der Ebene E auf.
  - (b) Prüfen Sie, ob der Punkt P  $(-2|3|1)$  auf der Geraden g oder auf der Ebene E liegt.
  - (c) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E. Bestimmen Sie ggf. den Schnittpunkt S.
  - (d) Bestimmen Sie die Schnittpunkte Q und R der Geraden g mit der x-y-Ebene bzw. der y-z-Ebene.
  - (e) In welchen Punkten schneiden die Koordinatenachsen die Ebene E?
  - (f) Zeichnen Sie anhand der Ergebnisse aus c), d) und e) ein Schrägbild von g und E.
  
2. Gegeben seien die Punkte A  $(0|0|0)$ , B  $(8|0|0)$ , C  $(8|8|0)$ , D  $(0|8|0)$  und S  $(4|4|8)$  die Eckpunkte einer quadratischen Pyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze S sind.
  - (a) Zeichnen Sie in einem kartesischen Koordinatensystem ein Schrägbild der Pyramide.
  - (b) Eine Gerade g schneidet die z-Achse bei  $z = 12$  und geht durch die Spitze S der Pyramide. Wo schneidet diese Gerade g die x-y-Ebene?
  - (c) Gegeben sei weiter die Ebene E:  $2y + 5z = 24$ .  
 Welche besondere Lage bezüglich der Koordinatenachsen hat diese Ebene E?  
 Wo schneiden die Seitenkanten  $\overline{AS}$ ,  $\overline{BS}$ ,  $\overline{CS}$  und  $\overline{DS}$  der Pyramide die Ebene E?  
 Zeichnen Sie die Schnittfläche der Ebene E mit der Pyramide in das Schrägbild ein und zeigen Sie, dass diese Schnittfläche ein Trapez ist.
  - (d) In welchem Punkt T durchdringt die Höhe h der Pyramide die Schnittfläche aus (c)? Zeichnen Sie auch h und T in das Schrägbild ein.

3. Gegeben ist der abgebildete Würfel mit der Kantenlänge 4.



- In welchem Punkt  $S$  schneidet die Gerade  $g$  durch  $D$  und  $F$  die Ebene  $E_1$  durch die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$ ?
- Die Punkte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  und  $F$  bilden die Ecken einer Pyramide. Bestimmen Sie deren Volumen.
- In welchen Punkten durchstößt die Gerade  $h$  durch  $Q$  und  $R$  die Koordinatenebenen?
- Bestimmen sie die Gleichung der Schnittgeraden  $j$  der Ebene  $E_1$  und der Ebene  $E_2$  durch  $B$ ,  $D$  und  $H$ .
- Wo durchstößt die Gerade  $k$  durch  $B$  und  $H$  die Ebene  $E_1$ ?

## Lösungen

$$1. \quad (a) \quad E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Parametergleichung})$$

$$\begin{array}{l} (1) \left| \begin{array}{l} x = -2 + 4\lambda + 4\mu \\ y = 5 - 2\lambda - 6\mu \\ z = 2 - 2\lambda \end{array} \right| \end{array}$$

Aus Zeile (3) folgt:  $z = 2 - 2\lambda \iff (z - 2) = -2\lambda \iff (4 - 2z) = 4\lambda$

Eingesetzt in die Gleichungen (1) und (2) ergibt:

$$\begin{array}{l} (4) \left| \begin{array}{l} x = -2 + (4 - 2z) + 4\mu \\ y = 5 + (z - 2) - 6\mu \end{array} \right| \end{array}$$

Zusammenfassen:

$$\begin{array}{l} (4) \left| \begin{array}{l} x = 2 - 2z + 4\mu \\ y = 3 + z - 6\mu \end{array} \right| \end{array}$$

Gleichung (4) mit Faktor 3 multiplizieren und Gleichung (5) mit Faktor 2:

$$\begin{array}{l} (6) \left| \begin{array}{l} 3x = 6 - 6z + 12\mu \\ 2y = 6 + 2z - 12\mu \end{array} \right| \end{array}$$

Addition von (6) und (7) ergibt:

$$\boxed{E : 3x + 2y + 4z = 12} \quad (\text{Koordinatengleichung})$$

$$(b) \quad \boxed{P \in g} \quad (r = 2)$$

$$\boxed{P \notin E}, \text{ da } 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \neq 12$$

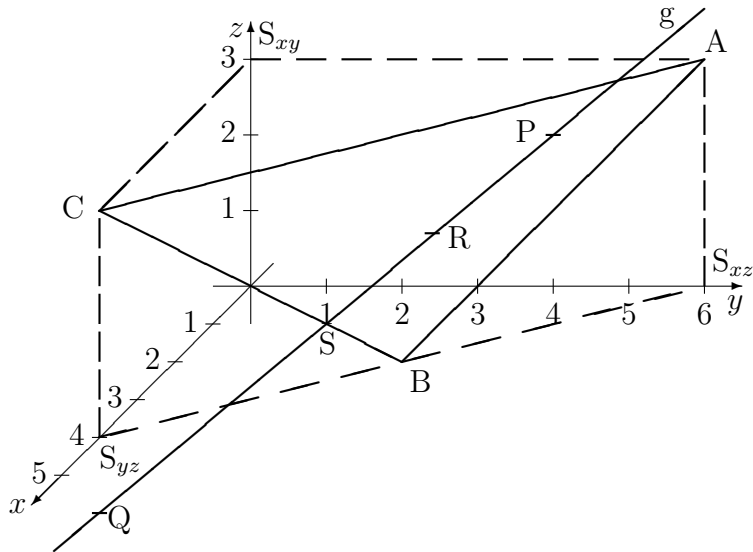
$$(c) \quad 3(14 - 8r) + 2(-1 + 2r) + 4(-1 + r) = 12 \quad \Rightarrow r = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \boxed{S(2|2|\frac{1}{2})}$$

$$(d) \quad z = 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow \boxed{Q(6|1|0)}$$

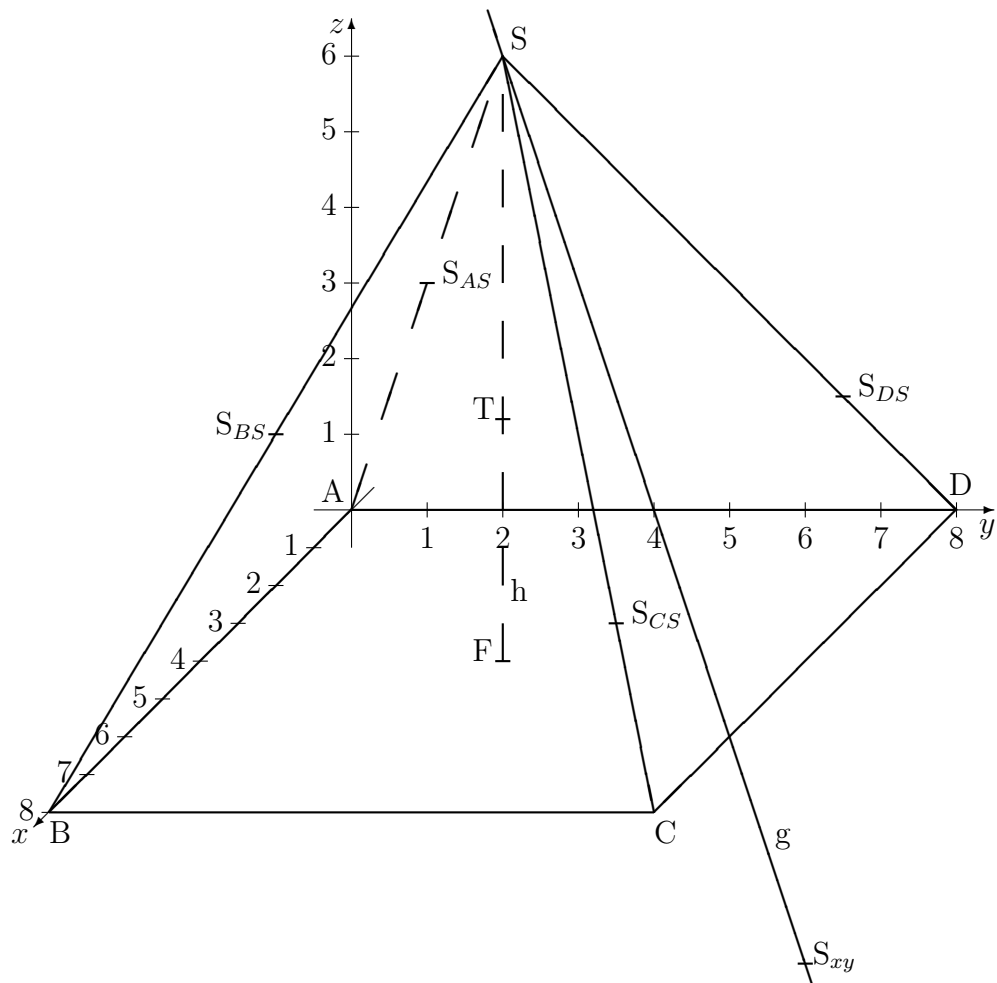
$$x = 0 \Rightarrow r = \frac{7}{4} \Rightarrow \boxed{R(0|\frac{5}{2}|\frac{3}{4})}$$

$$(e) \quad \boxed{S_{xy}(0|0|3)}; \boxed{S_{xz}(0|6|0)}; \boxed{S_{yz}(4|0|0)}$$

(f) Schrägbild:



2. (a) Schrägbild der Pyramide (Die Schnittfläche der Ebene E (Trapez) wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit nur angedeutet):



$$(b) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ x-y-Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4r = \lambda \\ 4r = \mu \\ 12 - 4r = 0 \end{cases} \Rightarrow r = 3 \Rightarrow \boxed{S_{xy}(12|12|0)} \quad (\lambda = \mu = 12)$$

- (c) Die Ebene E liegt parallel zur x-Achse. Die Schnittpunkte mit der y-Achse bzw. z-Achse sind:  $S_y(0|12|0)$  bzw.  $S_z(0|0|\frac{24}{5})$ .

$$\overline{AS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ in E: } 2(4r) + 5(8r) = 24 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{S_{AS}(2|2|4)}$$

$$\overline{BS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \dots \quad r = \frac{1}{2} \quad \dots \quad \boxed{S_{BS}(6|2|4)}$$

$$\overline{CS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \dots \quad r = \frac{1}{4} \quad \dots \quad \boxed{S_{CS}(7|7|2)}$$

$$\overline{DS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \dots \quad r = \frac{1}{4} \quad \dots \quad \boxed{S_{DS}(1|7|2)}$$

Ein Trapez ist ein Viereck mit 2 parallelen Seiten. Ein Viereck liegt offensichtlich vor, da es 4 Schnittpunkte gibt. Wenn nun nur 2 Seiten parallel sind, dann ist damit gezeigt, dass es sich um ein Trapez handelt. Man zeigt also hier, dass 2 Richtungsvektoren  $(\overline{S_{AS}S_{BS}}, \overline{S_{CS}S_{DS}})$  linear abhängig sind und die anderen beiden linear unabhängig.

$$\begin{pmatrix} 6-2 \\ 2-2 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 7-7 \\ 2-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{linear abhängig } (t_1 = \frac{2}{3})$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{linear unabhängig}$$

Es handelt sich tatsächlich um ein Trapez!

- (d) Der Fußpunkt F der Höhe h befindet sich in der Mitte der quadratischen Grundfläche:  $F(4|4|0)$ .

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Eine Parametergleichung der Schnittebene lautet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} 4 &= 2 + 4\lambda - \mu \\ 4 &= 2 + 5\mu \\ 8r &= 4 - 2\mu \end{cases}$$

erhält man  $r = \mu = \frac{2}{5}$ ;  $\lambda = \frac{3}{5}$  und damit  $T(4|4|\frac{16}{5})$

3. (a)  $A(4|0|0)$   $D(0|0|0)$   $G(0|4|4)$   $Q(4|4|2)$   
 $B(4|4|0)$   $E(4|0|4)$   $H(0|0|4)$   $R(2|4|4)$   
 $C(0|4|0)$   $F(4|4|4)$   $P(4|2|4)$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g \cap E_1 \Rightarrow S_g\left(\frac{10}{3}|\frac{10}{3}|\frac{10}{3}\right) \quad (r = \frac{5}{6}; \lambda = \mu = \frac{1}{3})$$

- (b) Wie man sofort sieht, ist das Dreieck  $PQR$  gleichseitig.

Folglich gilt:  $|PQ| = |QR| = |PR| = \sqrt{8}$

Die Grundfläche berechnet sich nach:  $G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ .

Höhe der Pyramide:  $h = |SF| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{Volumen: } V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow V = \frac{2}{3}$$

$$(c) h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{x-y-Ebene : } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \text{x-y-Ebene} \Rightarrow S_{xy}(6|4|0) \quad (r = -1; \lambda = 6; \mu = 4)$$

Es gibt keinen Schnittpunkt mit der x-z-Ebene, da die Gerade  $h$  parallel zur x-z-Ebene verläuft.

$$\text{y-z-Ebene : } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \text{y-z-Ebene} \Rightarrow S_{yz}(0|4|6) \quad (r = 2; \lambda = 4; \mu = 6)$$

$$(d) E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_1 \cap E_2 : \begin{array}{l|l} (1) & 4 - 2\mu = 4\nu \\ (2) & 2 + 2\lambda + 2\mu = 4\nu \\ (3) & 4 - 2\lambda = 4\tau \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} (1) - (2) \Rightarrow (4) & 2 - 2\lambda - 4\mu = 0 \\ (1) + (2) \Rightarrow (5) & 6 + 2\lambda = 8\nu \\ (2) + (3) \Rightarrow (6) & 6 + 2\mu = 4\nu + 4\tau \end{array}$$

Aus (5) folgt:  $\lambda = -3 + 4\nu$ , aus (6) folgt:  $\mu = -3 + 2\nu + 2\tau$ .

Beides in (4) eingesetzt ergibt:

$$2 - 2(-3 + 4\nu) - 4(-3 + 2\nu + 2\tau) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau = \frac{5}{2} - 2\nu$$

Einsetzen in  $E_2$ :

$$j : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{5}{2} - 2\nu\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittgerade } j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$(e) \quad k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$k \cap E_1 \Rightarrow \boxed{S_k(6|6|2)} \quad \left(r = -\frac{1}{2}; \lambda = 1; \mu = -1\right)$$