

Analytische Geometrie 2

Definition: Kann man jeden Vektor eines Vektorraums V als Linearkombination (LK) der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ aus V darstellen, so heißt das Vektor- k -Tupel $(\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_k)$ ein **Erzeugendensystem** von V .

Sind dabei die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ linear unabhängig, dann heißt $(\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_k)$

eine **Basis** von V . Die Standardbasis für den $\mathbb{R}^3$ ist: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

① Prüfe, ob die drei Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

② Bestimme die Koordinatengleichungen der Ebenen aus den Normalenformen.

a) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

b) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

c) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

③ Welche der folgenden Ebenen sind orthogonal, welche sind parallel?

E₁: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 0,$

E₂: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$

E₃: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

E₄: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$

E₅: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = 0,$

E₆: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

④ Welche Abstände haben die Punkte P, Q, R von der Ebene E?

a) P(2|4|-1), Q(3|-7|0), R(5|5|5), E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

b) P(0|10|-3), Q(8|1|1), R(7|6|-2), E: $x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0$

⑤ Die Punkte A(12|0|0), B(12|8|6), C(2|8|6), D(2|0|0), S(7|16|-13) sind die Ecken einer quadratischen Pyramide. Fertige eine Zeichnung an und berechne ihr Volumen.

⑥ Welchen Abstand hat der Punkt P von der Geraden g?

a) P(2|4), g: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

b) P(-2|5), g: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$

c) P(-1|3), g: $2x_1 + 5x_2 = 1$

d) P(6|11), g: $3x_1 + 4x_2 = 7$

Lösungen:

① a) Nein b) Ja c) Ja

② a) $4x_1 + 5x_2 - x_3 = 1$ b) $x_1 + 2x_2 = 11$ c) $5x_1 + x_3 = -16$

③ $E_1 \perp E_2,$ $E_1 \perp E_6,$ $E_2 \perp E_4,$ $E_3 \perp E_4,$
 $E_4 \perp E_5,$ $E_4 \perp E_6,$ $E_2 \parallel E_6,$ $E_3 \parallel E_5$

④

	a)	b)
d(P, E)	$\frac{1}{3}$	$\frac{28}{\sqrt{33}}$
d(Q, E)	$\frac{14}{3}$	0
d(R, E)	$\frac{16}{3}$	$\frac{9}{\sqrt{33}}$

⑤ $V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 20 = \frac{2000}{3} \approx 666,67$

⑥ a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{9}{\sqrt{65}}$ c) $\frac{12}{\sqrt{29}}$ d) 11