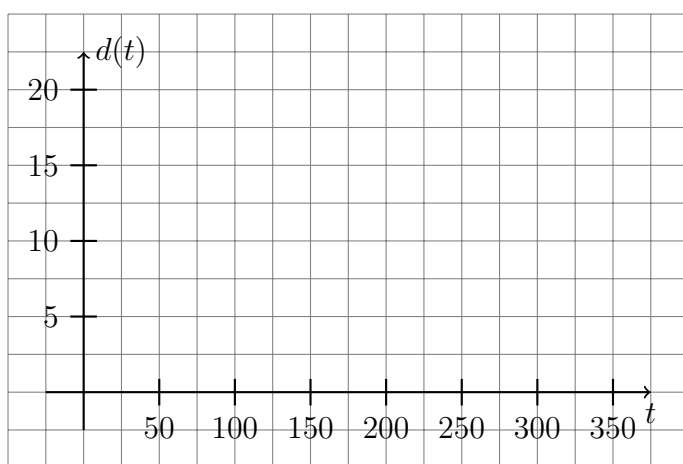


Die Länge eines Tages von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang ändert sich im Verlauf eines Jahres, wenn man beispielsweise in Köln wohnt¹. Die Tageslänge $d(t)$ in Köln kann mit der Funktion $d_{\text{Köln}}(t) = 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right) + 12$ näherungsweise beschrieben werden ($0 \leq t \leq 365$ in Tagen und $d(t)$ in Stunden). Dabei steht $t = 0$ für den 1. Januar. Gehen Sie davon aus, dass kein Schaltjahr vorliegt.

1. Bestimmen Sie das Datum für $t = 365$.
2. Erklären Sie, wie Sie Ihren Taschenrechner einstellen müssen, damit Sie sinnvolle Ergebnisse bei Berechnungen erhalten.
3. Schätzen Sie, wie lang der kürzeste und der längste Tag ist.
4. Schätzen Sie, wie viele Nullstellen der Graph der Funktion $d_{\text{Köln}}(t)$ hat.
5. Zeichnen Sie den Graph von $d_{\text{Köln}}(t)$ in das vorbereitete Koordinatensystem:

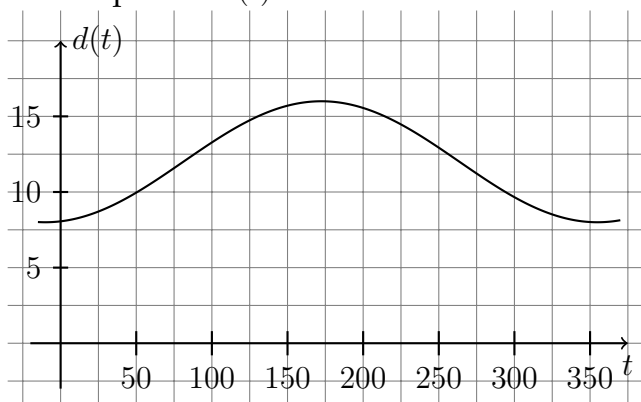


6. Vergleichen Sie Ihre Schätzwerte aus den Aufgaben 3 und 4 mit Ihrer Zeichnung.
7. Berechnen Sie die Tageslänge am 6. Januar. und am 18. März.
8. Berechnen Sie die beiden Daten, an denen die Tageslänge 12 Stunden beträgt.
9. Zeigen Sie durch eine geeignete Rechnung, dass der Graph keine Nullstellen hat.
10. Berechnen Sie an welchem Datum der längste Tag im Jahr ist und wie lang dieser Tag ist.
11. Berechnen Sie den Tiefpunkt und die beiden Wendepunkte.
Zur Kontrolle: $d''(t) = -\frac{16\pi^2}{365^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right)$
12. Beschreiben Sie den Kurvenverlauf von $d_{\text{Äquator}}(t)$.

¹ Befindet man sich an einem anderen Ort auf der Erde, dann muss die Funktion $d(t)$ angepasst werden.



1. $t = 365$ entspricht dem 1. Januar im nächsten Jahr.
2. Da mit dem Sinus keine Winkel berechnet werden sollen, muss der Taschenrechner auf das Bogenmaß (RAD) umgestellt werden, um sinnvolle Ergebnisse zu erhalten.
3. Im Sommer geht die Sonne morgens schätzungsweise gegen 5 Uhr auf und abends gegen 21 Uhr unter. Das entspricht einer maximalen Tageslänge von 16 Stunden. Im Winter geht die Sonne gegen 8 Uhr auf und gegen 16 Uhr unter. Das entspricht einer minimalen Tageslänge von 8 Stunden.
4. Da die Tageslänge an jedem Tag im Jahr schätzungsweise mindestens 8 Stunden beträgt, kann es keine Nullstellen geben. Wenn es Nullstellen gäbe, dann würde an diesen Tagen die Sonne gar nicht aufgehen und das war bisher noch nicht der Fall.
5. Der Graph von $d(t)$:



6. Die geschätzten Werte passen ungefähr zu den Angaben im Graph und wie zu erwarten war sieht man keine Nullstellen.
7. $d(6. \text{ Januar}) = d(5) = 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot 5 - \frac{4\pi}{9}\right) + 12 \approx 8,14$
 $d(18. \text{ März}) = d(76) = 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot 76 - \frac{4\pi}{9}\right) + 12 \approx 11,65$
8. An welchen Tagen beträgt die Tageslänge 12 Stunden?

$$d(t) = 12$$

$$4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right) + 12 = 12 \quad | -12$$

$$4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right) = 0 \quad | :4$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right) = 0 \quad | \arcsin$$



1. Basislösung:

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9} &= 0 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) & \left| + \frac{4\pi}{9} \right. \\ \frac{2\pi}{365} \cdot t &= \frac{4\pi}{9} + k \cdot 2\pi & \left| \cdot \frac{365}{2\pi} \right. \\ t &= \frac{730}{9} + k \cdot 365 \\ t &= 81,\bar{1} + k \cdot 365\end{aligned}$$

2. Basislösung:

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9} &= \pi - 0 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) & \left| + \frac{4\pi}{9} \right. \\ \frac{2\pi}{365} \cdot t &= \frac{13\pi}{9} + k \cdot 2\pi & \left| \cdot \frac{365}{2\pi} \right. \\ t &= \frac{4745}{18} + k \cdot 365 \\ t &= 263,6\bar{1} + k \cdot 365\end{aligned}$$

Am 23. März ($t = 81$) und am 22. September ($t = 264$) beträgt die Tageslänge ungefähr 12 Stunden. Alle weiteren (periodischen) Lösungen liegen nicht im gesuchten Intervall.

9. Nullstellen:

$$\begin{aligned}d(t) &= 0 \\ 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right) + 12 &= 0 & \left| -12 \right. \\ 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right) &= -12 & \left| : 4 \right. \\ \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right) &= -3\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist nicht lösbar, da der Sinus nur Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen kann. Damit ist gezeigt, dass es keine Nullstellen gibt.

10. Berechnung des längsten Tages (Hochpunkt):

$$\begin{aligned}d'(t) &= 0 \\ \frac{8\pi}{365} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right) &= 0 & \left| \cdot \frac{365}{8\pi} \right. \\ \cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right) &= 0 & \left| \arccos \right.\end{aligned}$$



1. Basislösung:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9} &= \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) & \left| + \frac{4\pi}{9} \right. \\ \frac{2\pi}{365} \cdot t &= \frac{17\pi}{18} + k \cdot 2\pi & \left| \cdot \frac{365}{2\pi} \right. \\ t &= \frac{6205}{36} + k \cdot 365 \\ t &= 172,36\bar{1} + k \cdot 365 \end{aligned}$$

Berechnung der zweiten Ableitung, um anschließend die Art des Extremums zu bestimmen:

$$\begin{aligned} d''(t) &= -\frac{16\pi^2}{365^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right) \\ d''\left(\frac{6205}{36}\right) &= -\frac{16\pi^2}{365^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot \frac{6205}{36} - \frac{4\pi}{9}\right) \approx -0,001185 < 0 \Rightarrow \text{HP} \\ d\left(\frac{6205}{36}\right) &= 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot \frac{6205}{36} - \frac{4\pi}{9}\right) + 12 = 16 \end{aligned}$$

Am 22. Juni ($t = 172$) ist der Tag am längsten und dauert 16 Stunden: $H(172|16)$. Da der gesuchte Hochpunkt mit der ersten Basislösung bereits gefunden wurde, kann hier auf die zweite Basislösung verzichtet werden.

11. Weitere Nullstellen der ersten Ableitung (und damit den gesuchten Tiefpunkt) erhält man durch die zweite Basislösung aus Aufgabe 10 (auf die zuvor verzichtet werden konnte):

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9} &= -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) & \left| + \frac{4\pi}{9} \right. \\ \frac{2\pi}{365} \cdot t &= -\frac{\pi}{18} + k \cdot 2\pi & \left| \cdot \frac{365}{2\pi} \right. \\ t &= -\frac{365}{36} + k \cdot 365 \end{aligned}$$

Diese Basislösung liegt außerhalb des gesuchten Intervalls. Daher wird die nächste Lösung mit $k = 1$ berechnet:

$$\begin{aligned} t_1 &= -\frac{365}{36} + 1 \cdot 365 = \frac{12775}{36} = 354,86\bar{1} \\ d''\left(\frac{12775}{36}\right) &= -\frac{16\pi^2}{365^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot \frac{12775}{36} - \frac{4\pi}{9}\right) \approx 0,001185 > 0 \Rightarrow \text{TP} \\ d\left(\frac{12775}{36}\right) &= 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot \frac{12775}{36} - \frac{4\pi}{9}\right) + 12 = 8 \end{aligned}$$

Am 21. Dezember ($t = 355$) ist der Tag am kürzesten und dauert 8 Stunden: $T(355|8)$.



Berechnung der Wendepunkte:

$$d''(t) = 0$$

$$-\frac{16\pi^2}{365^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right) = 0 \quad \left| \cdot \left(-\frac{365^2}{16\pi^2}\right) \right.$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right) = 0 \quad \left| \arcsin \right.$$

1. Basislösung:

$$\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9} = 0 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \left| + \frac{4\pi}{9} \right.$$

$$\frac{2\pi}{365} \cdot t = \frac{4\pi}{9} + k \cdot 2\pi \quad \left| \cdot \frac{365}{2\pi} \right.$$

$$t = \frac{730}{9} + k \cdot 365$$

$$t = 81,1 + k \cdot 365$$

Berechnung der dritten Ableitung, um dann zu überprüfen, ob ein Wendepunkt vorliegt:

$$d'''(t) = -\frac{32\pi^3}{365^3} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9}\right)$$

$$d''' \left(\frac{730}{9} \right) = -\frac{32\pi^3}{365^3} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot \frac{730}{9} - \frac{4\pi}{9}\right) \approx -0,00002 \neq 0 \Rightarrow W_1$$

$$d \left(\frac{730}{9} \right) = 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot \frac{730}{9} - \frac{4\pi}{9}\right) + 12 = 12$$

2. Basislösung

$$\frac{2\pi}{365} \cdot t - \frac{4\pi}{9} = \pi - 0 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \left| + \frac{4\pi}{9} \right.$$

$$\frac{2\pi}{365} \cdot t = \frac{13\pi}{9} + k \cdot 2\pi \quad \left| \cdot \frac{365}{2\pi} \right.$$

$$t = \frac{4745}{18} + k \cdot 365$$

$$t = 263,61 + k \cdot 365$$

Überprüfung mit der dritten Ableitung, ob ein Wendepunkt vorliegt:

$$d''' \left(\frac{4745}{18} \right) = -\frac{32\pi^3}{365^3} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot \frac{4745}{18} - \frac{4\pi}{9}\right) \approx 0,00002 \neq 0 \Rightarrow W_2$$

$$d \left(\frac{4745}{18} \right) = 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot \frac{4745}{18} - \frac{4\pi}{9}\right) + 12 = 12$$

$W_1 \left(\frac{730}{9} \mid 12 \right), W_2 \left(\frac{4745}{18} \mid 12 \right)$. (Die y -Koordinate von W_2 hätte man auch mit der vorliegenden Symmetrie und damit ohne Rechnung begründen können.)

12. Da am Äquator jeder Tag unabhängig von der Jahreszeit ist, sind dort alle Tage gleich lang. Der Graph ist also eine Parallele zur t -Achse (konstante Funktion).