

Eine Hürde bei der Integralrechnung ist das Auffinden einer Stammfunktion. Für Funktionen vom Typ $f(x) = c \cdot x^n$ kennst Du bereits die Stammfunktionen: $F(x) = \frac{c}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$. Auch bei Exponentialfunktionen vom Typ $g(x) = c \cdot e^{ax+b}$ ist es nicht weiter schwer, die passenden Stammfunktionen zu finden: $G(x) = \frac{c}{a} \cdot e^{ax+b} + C$ (Kettenregel rückwärts). Dass die Differentialrechnung mit der Integralrechnung sehr eng zusammenhängt, ist inzwischen auch kein Geheimnis mehr. Beginnen wir daher mit der Produktregel der Differentialrechnung und formen diese so um, dass wir eine Produktregel für die Integralrechnung¹ erhalten:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\int (u \cdot v)' dx = \int u' \cdot v dx + \int u \cdot v' dx$$

Das Integral und die Ableitung auf der linken Seite heben sich gegenseitig auf...

$$u \cdot v = \int u' \cdot v dx + \int u \cdot v' dx \quad \Rightarrow$$

$$\int u' \cdot v dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

Dabei fällt auf, dass das Integral nur teilweise (partiell) berechnet werden kann. Man spricht daher auch von **partieller Integration**. Da ein Integral weiterhin bestehen bleibt, könnte man denken, dass dieser Schritt gar nichts gebracht hat. Es gibt aber ein paar Tricks wie man diese Regel trotzdem nutzen kann. Dazu gleich mehr.



Produktintegration

Sind u und v (auf dem Intervall $[a; b]$) differenzierbare Funktionen mit stetigen Ableitungsfunktionen u' und v' , dann gilt:

$$\int u' \cdot v dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

bzw.

$$\int_a^b u' \cdot v dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v' dx$$



Strategie 1

Ein Trick besteht darin, u' und v so zu wählen, dass $u \cdot v'$ „einfacher“ wird als $u' \cdot v$.

¹ Auf die Integrationskonstante C wird hier bei einzelnen Rechenschritten verzichtet, da sie vermutlich eher verwirrend, als erhellend ist.



Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:



Beispiel 1

$$\int_0^1 3x \cdot e^{2x} dx = ?$$



Lösung

Wir haben jetzt zwei Möglichkeiten:

$$1. \int_0^1 \underbrace{3x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v(x)} dx \Rightarrow u(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad v'(x) = 2e^{2x}$$

$$2. \int_0^1 \underbrace{e^{2x}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{3x}_{v(x)} dx \Rightarrow u(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \quad v'(x) = 3$$

Wie man deutlich sieht ist die zweite Möglichkeit die geschicktere Wahl, da hier beim Ableiten von $v(x)$ das x wegfällt und nur die Konstante 3 übrig bleibt. Das bedeutet dann für die komplette Rechnung:

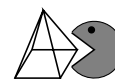
$$\begin{aligned} \int_0^1 \underbrace{e^{2x}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{3x}_{v(x)} dx &= \left[\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)} \cdot \underbrace{3x}_{v(x)} \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)} \cdot \underbrace{3}_{v'(x)} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} \cdot 3x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{3}{2}e^{2x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} \cdot 3x \right]_0^1 - \left[\frac{3}{4}e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2}e^2 - 0 - \left(\frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{4} \approx 6,29 \end{aligned}$$

Ein Beispiel für ein unbestimmtes Integral:



Beispiel 2

$$\int x^2 \cdot \cos(x) dx = ?$$



Lösung

Wenn wir zweimal x^2 ableiten wird daraus 2, sodass wir sinnvollerweise $v(x) = x^2$ wählen:

$$\int \underbrace{x^2}_{v(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{u'(x)} dx = \underbrace{x^2}_{v(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u(x)} - \int \underbrace{2x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u(x)} dx$$

Das Integral auf der rechten Seite enthält wieder ein Produkt, sodass hier noch einmal die Produktintegration angewendet werden muss. Wir wählen dazu: $v_{neu}(x) = 2x$

$$\begin{aligned} &= x^2 \cdot \sin(x) - \left(\int \underbrace{2x}_{v_{neu}(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u'_{neu}(x)} dx \right) \\ &= x^2 \cdot \sin(x) - \left(-2x \cdot \cos(x) - \int -2 \cos(x) dx \right) \\ &= x^2 \cdot \sin(x) - \left(-2x \cdot \cos(x) + 2 \cdot \int \cos(x) dx \right) \\ &= x^2 \cdot \sin(x) - \left(-2x \cdot \cos(x) + 2 \sin(x) \right) \\ &= x^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2 \sin(x) \\ &= \sin(x) \cdot (x^2 - 2) + 2x \cdot \cos(x) + C \end{aligned}$$

Strategie 2

Ein weiterer Trick besteht darin, u' und v so zu wählen, dass $u \cdot v'$ „ähnlich“ wird.

Beispiel 3

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = ?$$



Lösung

Betrachten wir unsere beiden Wahlmöglichkeiten und schauen uns an, welche „ähnlich“ wird:

$$1. \int \underbrace{\sin(x)}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v(x)} dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\cos(x) \quad v'(x) = -\sin(x)$$

$$2. \int \underbrace{\cos(x)}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v(x)} dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = \sin(x) \quad v'(x) = \cos(x)$$

Wie wir sehen können sind die beiden Produkte $u \cdot v'$ gleich (es ist also hier eigentlich egal, welche Möglichkeit wir wählen), die zweite Möglichkeit hat jedoch keine negativen Vorzeichen, die häufig zu Fehlern führen. Daher ist es sinnvoller, diese zu wählen. Noch ein Hinweis: $(\sin(x))^2 = \sin^2(x)$.

$$\int \cos(x) \cdot \sin(x) dx = \sin^2(x) - \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$$

Das Integral von der rechten Seite bringen wir auf die linke Seite...

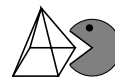
$$2 \cdot \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \sin^2(x)$$
$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \frac{1}{2} \sin^2(x) + C$$

Strategie 3

Ein weiterer Trick besteht darin, eine 1 zu ergänzen, damit ein Produkt vorliegt.

Beispiel 4

$$\int \ln(x) dx = ?$$



Lösung

Ergänzen wir zuerst bei diesem Integral eine Eins: $\int 1 \cdot \ln(x) \, dx$. Dann untersuchen wir die beiden Wahlmöglichkeiten:

$$1. \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v(x)} \, dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = x \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$2. \int \underbrace{\ln(x)}_{u'(x)} \cdot \underbrace{1}_{v(x)} \, dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = ? \quad v'(x) = 0$$

Bei der zweiten Möglichkeit, müssen wir bereits wissen wie man $\ln(x)$ integriert. Aber genau das wollen wir ja berechnen. Diese Möglichkeit führt also nicht weiter. Wählen wir daher die erste Möglichkeit:

$$\begin{aligned} \int \ln(x) \, dx &= \int 1 \cdot \ln(x) \, dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1 \, dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C \end{aligned}$$

Übungsaufgaben

$$1. \int (ax + b) \cdot \sin(x) \, dx$$

$$2. \int (ax^2 + bx + c) \cdot \cos(x) \, dx$$

$$3. \int x \cdot \cos(ax) \, dx$$

$$4. \int \sin^3(x) \, dx$$



Lösung von Übungsaufgabe 1

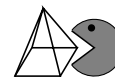
$$\begin{aligned}\int \underbrace{(ax+b)}_{v(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u'(x)} dx &= (ax+b) \cdot (-\cos(x)) - \int a \cdot (-\cos(x)) dx \\ &= -(ax+b) \cdot \cos(x) + a \int \cos(x) dx \\ &= -(ax+b) \cdot \cos(x) + a \cdot \sin(x) + C\end{aligned}$$

Lösung von Übungsaufgabe 2

$$\begin{aligned}\int \underbrace{(ax^2+bx+c)}_{v(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{u'(x)} dx &= (ax^2+bx+c) \cdot \sin(x) - \int \underbrace{(2ax+b)}_{v_{neu}(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u'_{neu}(x)} dx \\ &= (ax^2+bx+c) \cdot \sin(x) - \left((2ax+b) \cdot (-\cos(x)) - \int 2a \cdot (-\cos(x)) dx \right) \\ &= (ax^2+bx+c) \cdot \sin(x) - \left((2ax+b) \cdot (-\cos(x)) + 2a \cdot \int \cos(x) dx \right) \\ &= (ax^2+bx+c) \cdot \sin(x) + (2ax+b) \cdot \cos(x) - 2a \cdot \int \cos(x) dx \\ &= (ax^2+bx+c) \cdot \sin(x) + (2ax+b) \cdot \cos(x) - 2a \cdot \sin(x) + C \\ &= (ax^2+bx+c-2a) \cdot \sin(x) + (2ax+b) \cdot \cos(x) + C\end{aligned}$$

Lösung von Übungsaufgabe 3

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{\cos(ax)}_{u'(x)} dx &= x \cdot \frac{1}{a} \cdot \sin(ax) - \int \frac{1}{a} \cdot \sin(ax) dx \\ &= \frac{x}{a} \cdot \sin(ax) - \frac{1}{a} \int \sin(ax) dx \\ &= \frac{x}{a} \cdot \sin(ax) + \frac{1}{a^2} \cdot \cos(ax) + C\end{aligned}$$



Lösung von Übungsaufgabe 4

Hinweis: Es gilt der „trigonometrische Pythagoras“ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$\int \sin^3(x) \, dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\sin^2(x)}_{v(x)} \, dx = -\cos(x) \cdot \sin^2(x) - \int -\cos(x) \cdot 2 \sin(x) \cos(x) \, dx$$

$$= -\cos(x) \cdot \sin^2(x) + 2 \int \sin(x) \cdot \cos^2(x) \, dx$$

$$= -\cos(x) \cdot \sin^2(x) + 2 \int \sin(x) \cdot (1 - \sin^2(x)) \, dx$$

$$= -\cos(x) \cdot \sin^2(x) + 2 \int (\sin(x) - \sin^3(x)) \, dx$$

$$= -\cos(x) \cdot \sin^2(x) + 2 \int \sin(x) \, dx - 2 \int \sin^3(x) \, dx$$

$$= -\cos(x) \cdot \sin^2(x) - 2 \cos(x) - 2 \int \sin^3(x) \, dx$$

$$3 \int \sin^3(x) \, dx = -\cos(x) \cdot \sin^2(x) - 2 \cos(x)$$

$$= -\cos(x) \cdot (\sin^2(x) + 2)$$

$$\int \sin^3(x) \, dx = -\frac{1}{3} \cos(x) \cdot (\sin^2(x) + 2) + C$$