

Untersuchung einer Kurvenschar



Gegeben ist die Kurvenschar $f_a(x) = x^2 - (a+1) \cdot x + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $a \geq 1$.

a) Untersuchen Sie f_a auf Nullstellen und Extremstellen.

$$f_a(x) = 0 \quad (1)$$

$$\underbrace{x^2 - (a+1) \cdot x}_p + \underbrace{a}_q = 0 \quad (2)$$

$$x_{1,2} = \frac{a+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - a} \quad (3)$$

$$= \frac{a+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+1)^2}{4} - \frac{4a}{4}} \quad (4)$$

$$= \frac{a+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+1)^2 - 4a}{4}} \quad (5)$$

$$= \frac{a+1}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 + 2a + 1 - 4a}{4}} \quad (6)$$

$$= \frac{a+1}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2a + 1}{4}} \quad (7)$$

$$= \frac{a+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-1)^2}{4}} \quad (8)$$

$$= \frac{a+1}{2} \pm \frac{a-1}{2} \quad (9)$$

$$x_1 = \frac{a+1}{2} - \frac{a-1}{2} \quad (10)$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{1}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \quad (11)$$

$$= 1 \quad (12)$$

$$x_2 = \frac{a+1}{2} + \frac{a-1}{2} \quad (13)$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{1}{2} + \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \quad (14)$$

$$= a \quad (15)$$

Das sind die beiden Nullstellen. Jetzt folgt die Berechnung der Extremstelle, genauer gesagt der x -Koordinate des Tiefpunkts, da es sich ausschließlich um konvexe Parabeln handelt.

$$f'_a(x) = 2x - (a+1) \quad (16)$$

$$f'_a(x) = 0 \quad (17)$$

$$2x - (a+1) = 0 \quad (18)$$

$$2x = a+1 \quad (19)$$

$$x = \frac{a+1}{2} \quad (20)$$



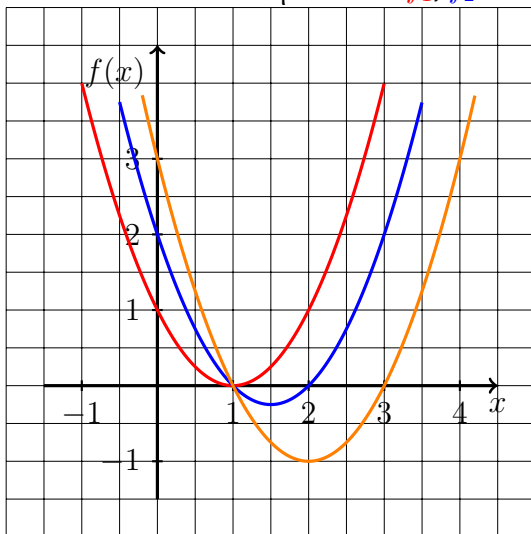
Auch wenn es aufgrund der Aufgabenstellung nicht erforderlich ist (es geht nur um die Extremstelle und nicht um einen Extrempunkt!), soll hier exemplarisch gezeigt werden, wie die y -Koordinate berechnet wird.

$$\begin{aligned} f_a\left(\frac{a+1}{2}\right) &= \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - (a+1) \cdot \frac{a+1}{2} + a \\ &= \frac{(a+1)^2}{4} - \frac{(a+1)^2}{2} + a \\ &= -\frac{(a+1)^2}{4} + a \end{aligned}$$

hier könnte man mit dem Zusammenfassen auch aufhören, da es nicht wirklich besser wird:

$$\begin{aligned} &= -\frac{a^2 + 2a + 1}{4} + a \\ &= -\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4} + a \\ &= -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- b) Skizzieren Sie die Graphen von f_1 , f_2 und f_3 für $-1 \leq x \leq 4$.



- c) Bestimmen Sie, welche Kurve der Schar f_a an der Stelle $x = 2$ ein lokales Extremum hat.

$$2 = \frac{a+1}{2} \quad (21)$$

$$4 = a+1 \quad (22)$$

$$3 = a \quad (23)$$

f_3 hat an der Stelle $x = 2$ einen Tiefpunkt.

- d) Bestimmen Sie, welche Kurve der Schar f_a genau eine Nullstelle hat.

Wenn $a = 1$ ist, dann fallen beide Nullstellen zusammen und es gibt nur noch eine einzige Nullstelle. Also ist f_1 die gesuchte Kurve der Schar.

Untersuchung einer Kurvenschar



e) Geben Sie eine Stammfunktion von f_a an.

$$F_a(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a+1}{2} \cdot x^2 + ax$$

f) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks A_a , welches im 1. Quadranten vom Graphen von f_a und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossen wird.

$$A_a = \int_0^1 f_a(x) \, dx \quad (24)$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a+1}{2} \cdot x^2 + ax \right]_0^1 \quad (25)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{a+1}{2} + a - 0 \quad (26)$$

$$= \frac{2}{6} - \frac{3a+3}{6} + \frac{6a}{6} \quad (27)$$

$$= \frac{2-3a-3+6a}{6} \quad (28)$$

$$= \frac{3a-1}{6} \quad (29)$$

g) Bestimmen Sie die Kurve der Schar f_a für die $A_a = \frac{4}{3}$ beträgt.

$$\frac{3a-1}{6} = \frac{4}{3} \quad (30)$$

$$3a-1 = 8 \quad (31)$$

$$3a = 9 \quad (32)$$

$$a = 3 \quad (33)$$

Bei der Kurve f_3 beträgt der eingeschlossene Flächeninhalt $\frac{4}{3}$.