

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

(a) Untersuchen Sie die Funktion f und skizzieren Sie ihren Graphen im Bereich $-1 < x < 6$.

(b) Bestimmen Sie die Stellen x_0 , an denen die Tangente an den Funktionsgraphen von f eine Gerade ist, die durch den Ursprung geht.

(Zur Kontrolle: $x_0 = 0$ oder $x_0 = 1$)

Bestimmen Sie den Schnittwinkel, den die beiden Tangenten bilden.

Lösung:

(a) **Bestimmung der ersten drei Ableitungen:**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \cdot e^{-x} \\ f'(x) &= 2xe^{-x} - x^2e^{-x} \\ &= xe^{-x}(2 - x) \\ f''(x) &= 2e^{-x} - 4xe^{-x} + x^2e^{-x} \\ &= e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \\ f'''(x) &= -6e^{-x} + 6xe^{-x} - x^2e^{-x} \\ &= -e^{-x}(x^2 - 6x + 6) \end{aligned}$$

Nullstellen:

$f(x) = 0 = x^2 \cdot e^{-x} \Rightarrow N(0|0)$ ist die einzige Nullstelle, da e^{-x} nicht Null wird.

Extrema:

$f'(x) = 0 = xe^{-x}(2 - x) \Rightarrow$ mögliche Extremstellen bei $x_{e_1} = 0$ und $x_{e_2} = 2$.

$f''(0) > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum bei $(0|0)$.

$f''(2) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei $(2|\frac{4}{e^2} \approx 0,541)$

Verhalten im Unendlichen:

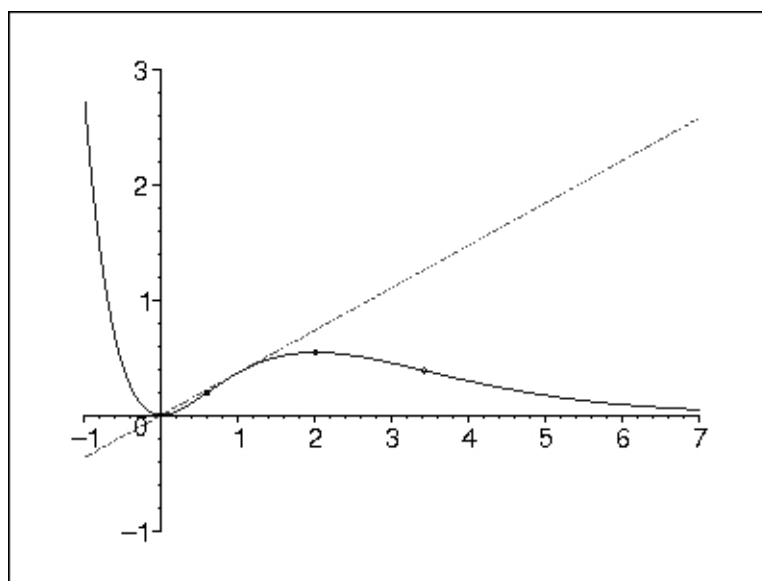
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \Rightarrow$ mögliche Wendepunkte bei $x_{w_1} = 2 + \sqrt{2}$ und $x_{w_2} = 2 - \sqrt{2}$

$$f'''(2 + \sqrt{2}) \neq 0 \quad f'''(2 - \sqrt{2}) \neq 0$$

$\Rightarrow$ Wendepunkte bei $(2 + \sqrt{2}|0,384)$ und $(2 - \sqrt{2}|0,191)$.



(b) Tangentengleichung:¹

$$f(x) = \underbrace{f'(x)}_{\text{Tangentensteigung}} \cdot x + \underbrace{b}_{\text{Achsenabschnitt}}$$

Da die Gerade (Tangente) durch den Ursprung gehen soll, ist $b = 0$.

$$\Rightarrow x^2 \cdot e^{-x} = x e^{-x} (2 - x) \cdot x + 0 \quad | : e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = x^2 \cdot (2 - x)$$

$$\Rightarrow x_0 = 0 \quad \vee \quad x_0 = 1$$

Die Tangente mit $x_0 = 0$ entspricht der x-Achse. Somit ist der Schnittwinkel der beiden Tangenten der Steigungswinkel der zweiten Tangente mit $x_0 = 1$.

Da $f'(1) = \frac{1}{e}$ gilt: $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{e}\right) \approx 20,198^\circ$.

2. Gegeben sind die Punkte A (1 | 1 | 0), B (0 | 3 | 1), C (-2 | 4 | 4) und D (-1 | 2 | 3).

(a) Welche Gerade der Geradenschar $h_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (für $k \in \mathbb{R}$)

schneidet die Gerade g , die durch die Punkte A und B verläuft?

Geben Sie die Lage des Schnittpunkts an.

(b) Untersuchen Sie, welche Lagebeziehung zwischen g und den übrigen Geraden der Geradenschar h_k besteht.

(c) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen.

(d) Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist. Bestimmen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel der Diagonalen dieses Parallelogramms.

¹ Achsenabschnitt ist gleichbedeutend mit „Schnittpunkt mit der y-Achse“.

Lösung:

$$(a) \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus $g = h_k$ folgt: $\mu = 1, \lambda = -1, k = 4$

$$\Rightarrow S(0|3|1)$$

- (b) Da es nur für $k = 4$ einen Schnittpunkt gibt, müssen die anderen Geraden h_k für $k \neq 4$ windschief zur Geraden g liegen. Parallelität ist ausgeschlossen, da die Richtungsvektoren linear unabhängig sind. (Außerdem hätte es sonst unendlich viele Schnittpunkte gegeben und nicht nur einen.)

$$(c) \quad E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$D \in E$? Für $\mu = 1$ und $\lambda = -1$ erhält man Punkt D. Antwort ist also „Ja“: A, B, C und D liegen in einer Ebene.

- (d) Nachzuweisen ist, dass die gegenüberliegenden Seiten die gleiche Länge haben und parallel zueinander sind.

$$|AB| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = |DC|$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{AB}} = k \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{DC}} \text{ für } k = -1 \text{ erfüllt}$$

$$|AD| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = |BC|$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ für } k = 1 \text{ erfüllt}$$

Damit ist nachgewiesen, dass ein Parallelogramm vorliegt.

$$d_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = d_2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2} \Rightarrow S\left(-\frac{1}{2} \middle| \frac{5}{2} \middle| 2\right)$$

Berechnung des Schnittwinkels α zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum mit der

Formel:

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{3-3+8}{\sqrt{34}\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{51}} \Rightarrow \alpha \approx 55,936^\circ$$

3. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-1}$

- (a) Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen. [zur Kontrolle: $f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$]
- (b) Führen Sie eine ausführliche Funktionsuntersuchung durch (Definitionsbe-
reich, Symmetrie, Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, Verhalten an
den Grenzen des Definitionsbereichs).
- (c) Zeichnen Sie den Graphen von f .
- (d) Gegeben ist nun die Funktionenschar $f_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_a(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-a}$, $a \neq 0$.
 - i. An welcher Stelle x_0 besitzen alle Graphen der Schar eine waagerechte
Tangente?
Für welchen Wert von a ist f_a konstant?
 - ii. Zeigen Sie $f_0(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$ und $f_{\frac{1}{2}}(x) = 2$.
Berechnen Sie das Maß der Fläche, die von dem Graphen von f_0 , dem
Graphen $f_{\frac{1}{2}}$ und dem Intervall $[1; 2]$ eingeschlossen wird.

Lösung:

(a) **Ableitungen:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2-1}{x^2-1} \\ f'(x) &= \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \\ f''(x) &= \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

(b) **Definitionsbereich:**

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

Symmetrie:

$$f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-1} = f(-x) \Rightarrow y\text{-Achsensymmetrie}$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Rightarrow N_1 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \mid 0 \right) \text{ und } N_2 \left(-\sqrt{\frac{1}{2}} \mid 0 \right)$$

Lokale Extrema:

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ mögliche Extremstelle bei $x_e = 0$. Da $f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ lokales
Maximum bei $(0 \mid 1)$.

Wendepunkte:

Keine Wendepunkte, da $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{D}$.

Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

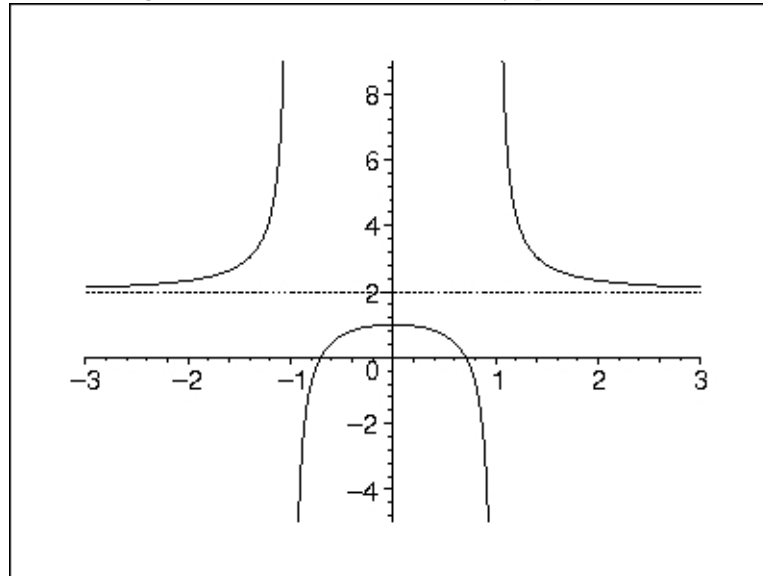
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

(c) Zeichnung (mit horizontaler Asymptote):



(d) i. Für welches x_0 gilt $f'_a(x_0) = 0$?

$$f'_a(x) = \frac{2x-4xa}{(x^2-a)^2} = 0$$

$\Rightarrow 2x - 4xa = 2x \cdot (1 - 2a) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$. Alle Graphen (da unabhängig von a !) besitzen demnach in $x_0 = 0$ eine waagerechte Tangente.

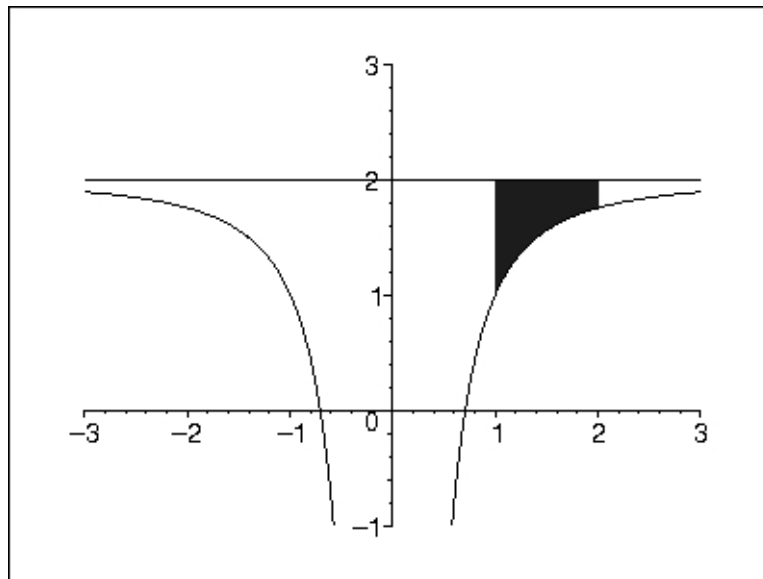
Für welches a gilt $f'_a(x) = 0$?

$\Rightarrow 2x \cdot (1 - 2a) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f_{\frac{1}{2}}(x) = 2$ für $x \in \mathbb{D}$. Für $a = \frac{1}{2}$ ist der Graph konstant 2.

ii. $f_0(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$ q.e.d.²

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-\frac{1}{2}} = 2 \frac{x^2-\frac{1}{2}}{x^2-\frac{1}{2}} = 2 \text{ für } x \in \mathbb{D}. \quad \text{q.e.d.}$$

² quod erat demonstrandum; lat. = „was zu beweisen war“



$$\int_1^2 \left(f_{\frac{1}{2}} - f_0 \right) dx = \left[2x - 2x - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

4. *Prüfungsaufgabe:* Gegeben ist die Kurvenschar $f_a(x) = \ln(ax^2)$, $a > 0$.
- (a) Bestimmen Sie die charakteristischen Eigenschaften und skizzieren Sie die Graphen K_1 und $K_{\frac{1}{2}}$!
 - (b) Zeigen Sie, dass alle Nullstellentangenten sich im gleichen Punkt schneiden!
 - (c) Die Nullstellentangenten und die Nullstellennormalen begrenzen einen Drachen. Für welches $a > 0$ ist der Drachen ein Quadrat?

Lösung:

- (a) **Definitionsbereich:** $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{2}{x}$, $f''(x) = -\frac{2}{x^2}$. Man beachte, dass die Ableitungen unabhängig von a sind!

Symmetrie: Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse, da $f(x) = f(-x)$ gilt.

Nullstellen: $\ln(ax^2) = 0 \quad |e^{\dots}$

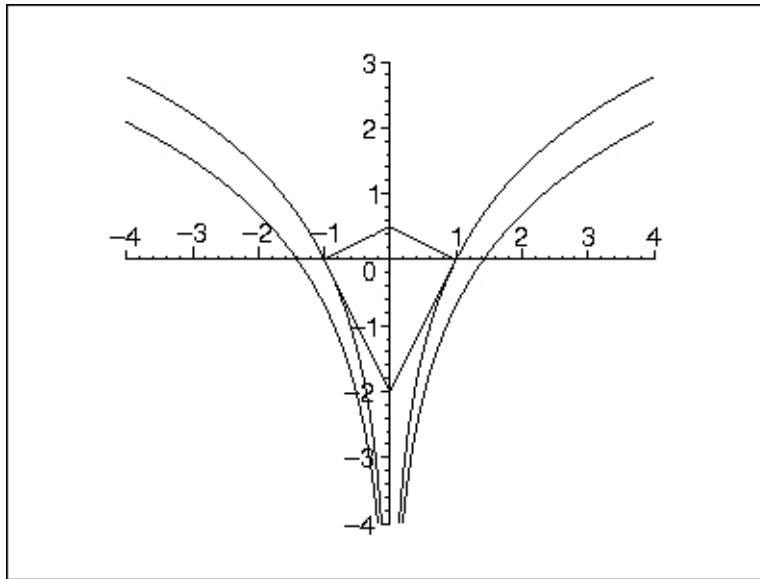
$$\Leftrightarrow ax^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{a}} \Rightarrow N\left(\pm \sqrt{\frac{1}{a}} \mid 0\right)$$

Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_a(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = -\infty$$

Es gibt keine Extrema und auch keine Wendepunkte, da die Zähler der ersten beiden Ableitungen ungleich Null sind.

K_1 ist die obere Kurve und $K_{\frac{1}{2}}$ die untere:



- (b) Nullstellentangente: $y = f'(x) \cdot x + b$
 $\Leftrightarrow y = \frac{2}{x} \cdot x + b \Leftrightarrow y = 2 + b$. Da y bei einer Nullstelle gleich Null ist, gilt (unabhängig von a !) $b = -2$. $\Rightarrow$ Schnittpunkt $S_1 (0 | -2)$.

- (c) Der Drache setzt sich aus zwei rechtwinkligen Dreiecken zusammen mit der y -Achse jeweils als Hypotenuse. Die Geradengleichung der Normalen³ lautet: $f(x) = -\frac{1}{f'(x)} \cdot x + b \Leftrightarrow y = -\frac{x^2}{2} + b$.

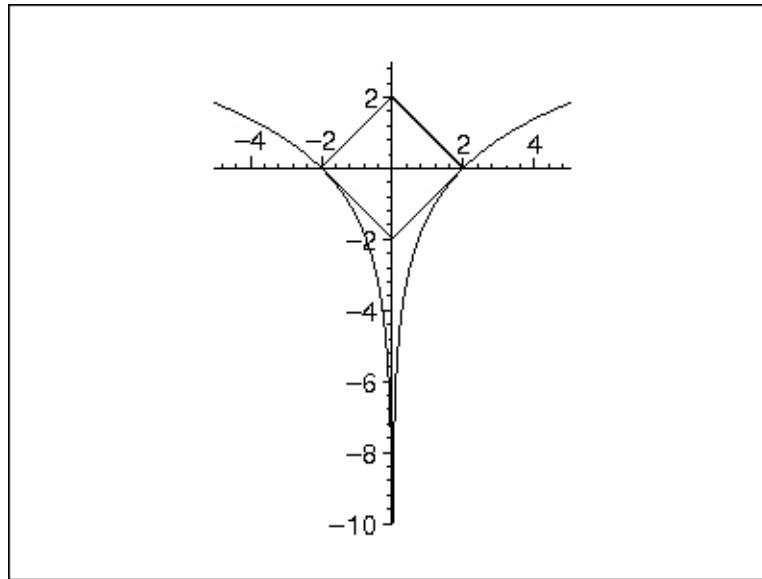
Einsetzen der Nullstelle ergibt: $0 = -\frac{1}{2a} + b \Rightarrow b = \frac{1}{2a}$. Alle Normalen schneiden sich also in $S_2 (0 | \frac{1}{2a})$.

Wenn man zwei kongruente, gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke mit den Hypotenusen aneinander setzt, erhält man ein Quadrat.

Aufgrund der y -Achsensymmetrie sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke kongruent. Man muss also nur noch dafür sorgen, dass sie auch gleichschenkelig sind ($|S_1 N| = |S_2 N|$)!

Nach Pythagoras muss folglich gelten: $\frac{1}{a} + (-2)^2 = \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{2a}\right)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$.

³ Die Normale ist orthogonal zur Tangente. Es gilt: $m_N = -\frac{1}{m_T}$



5. *Prüfungsaufgabe:* In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A $(1|2|3)$, B $(5|0|-1)$ und D $(-1|6|-1)$ gegeben.
- Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes C, der A, B und D zu einem Quadrat ergänzt!
 - Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Höhe 6; der Fußpunkt der Höhe sei der Mittelpunkt des Quadrats. Bestimmen Sie die Koordinaten der beiden möglichen Pyramidenspitzen S und S*!
 - Beschreiben Sie – prinzipiell – wie Volumen und Oberfläche der Pyramide bestimmt werden können!

Lösung:

(a) $\vec{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Die Addition von Ortsvektor $\vec{B}$ zu $\vec{AD}$ ergibt: C $(3|4|-5)$.

- (b) Den Mittelpunkt des Quadrats (Fußpunkt der Höhe) erhält man wie folgt:

$$M = \vec{A} + \frac{1}{2} \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = (2|3|-1).$$

Jetzt fehlt nur noch ein orthogonaler Vektor zu $\vec{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit der

Länge 6: Dafür nutzt man aus, dass bei orthogonalen Vektoren das Skalarprodukt Null ergibt. Zu lösen ist demnach folgende Gleichung: $1x + 1y - 4z = 0$.

Der Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist eine mögliche Lösung für diese Gleichung. Gleichzeitig hat er die gewünschte Länge 6. Somit erhält man als mögliche Pyramiden-
spitzen $S(6|7|1)$ und $S^*(-2|-1|-3)$.

- (c) Im Quadrat sind alle Seiten gleich lang: $|AB| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6$.
Da die Höhe ebenfalls 6 beträgt, errechnet sich das Volumen durch:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6^3 = 72.$$

Für die Oberfläche muss die Höhe eines Dreiecks berechnet werden, die die
Mantelfläche bilden: $M_{AD} = (0|4|1)$, $|M_{AD}S| = \sqrt{45}$. Dann kann man die
Oberfläche berechnen: $O = 6^2 + 4 \cdot 6 \cdot \sqrt{45} = 36(1 + \sqrt{5}) \approx 116,498$.