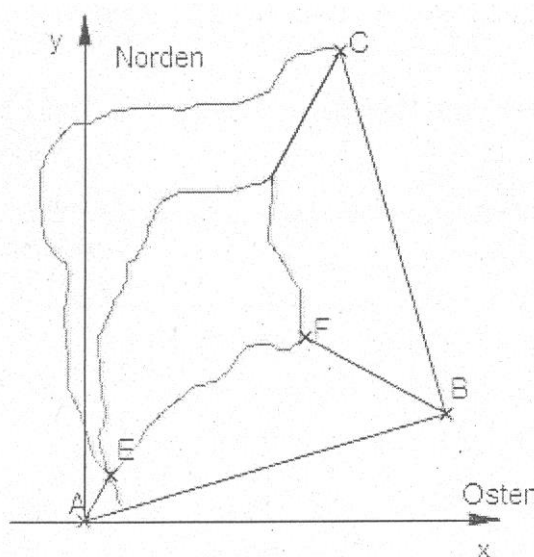


Abituraufgabe 2013 B2 (GK, TR)

1. Bei Ausgrabungen wurden die Überreste einer 4500 Jahre alten Pyramide entdeckt. Die Abbildung zeigt die Ansicht der Pyramidenruine von oben, also den Grundriss unter Berücksichtigung der Himmelsrichtungen. Für die noch erkennbaren Eckpunkte der Pyramide ergeben sich die Koordinatendarstellungen $A(0|0|0)$, $B(24|7|0)$ und $C(17|31|0)$. Außerdem konnten die Koordinaten weiterer Pyramidenpunkte auf zwei Seitenkanten rekonstruiert werden. Auf der von A ausgehenden Kante $\overline{AE}$ liegt der Punkt $E(1,7|3,1|3)$ und auf der von B ausgehenden Kante $\overline{BF}$ der Punkt $F(14,7|12,1|9)$. (Angaben in Metern)

- 1.1. Zeigen Sie, dass die Punkte A , B und C Eckpunkte eines Quadrats sein können. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Quadrats. Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Quadrateckpunktes D .
- 1.2. Aus den Überresten soll die ursprüngliche Höhe der Pyramide bestimmt werden. Ermitteln Sie die Koordinaten der ursprünglichen Spitze S der Pyramide und geben Sie die ursprüngliche Höhe der Pyramide an. [Zur Kontrolle: $S(8,5|15,5|15)$]



2. Aus Aufzeichnungen ist bekannt, dass in der Pyramidengrundebene ein Opferplatz lag, dessen Überreste zerstört wurden. Am Tag der Sommersonnenwende fiel den Aufzeichnungen zufolge zu einem bestimmten Zeitpunkt der Schatten der Pyramidenspitze genau auf den Mittelpunkt M des Opferplatzes. Die Richtung der Sonnenstrahlen lässt sich zu diesem Zeitpunkt durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4,8 \\ -1,4 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschreiben. Bestimmen Sie aus den bekannten Informationen den Mittelpunkt M des Opferplatzes.

Lösung

1.1

Ein Quadrat hat 4 gleich lange Seiten und 4 rechte Innenwinkel. Zum Nachweis, dass ein Quadrat vorliegen kann, genügt hier zu zeigen, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig **und** rechtwinklig ist. (Würde man nur die gleichen Seitenlängen nachrechnen, könnte es auch eine Raute sein!)

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = -7 \cdot (-24) + 24 \cdot (-7) = 0$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-7)^2 + 24^2} = 25 = |\overrightarrow{BA}|$$

Damit ist gezeigt, dass $\beta = 90^\circ$ beträgt und die Grundseiten gleich lang sind. Der Flächeninhalt beträgt $A = 25^2 = 625m^2$.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 17 \\ 31 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D(-7|24|0)$$

1.2

Die Geraden g_{AE} und g_{BF} schneiden sich im Punkt S , da die Punkte E und F auf den Seitenkanten der Pyramide liegen.

$$g_{AE} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1,7 \\ 3,1 \\ 3 \end{pmatrix}, g_{BF} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -9,3 \\ 5,1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Um den Schnittpunkt zu berechnen, müssen die beiden Geraden gleich gesetzt werden:

$$\begin{cases} 1,7r = 24 - 9,3s \\ 3,1r = 7 + 5,1s \\ 3r = 9s \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Teilt man nun die letzte Gleichung durch 3, dann erhält man } r = 3s. \text{ Diese Gleichung} \\ \text{kann man in die ersten beiden Gleichungen einsetzen und erhält:} \end{array} \right.$$

$\begin{cases} 1,7 \cdot 3s = 24 - 9,3s \\ 3,1 \cdot 3s = 7 + 5,1s \end{cases}$ Aus der ersten Gleichung folgt $s = \frac{5}{3}$ und aus der zweiten Gleichung ebenfalls. Es gibt also keinen Widerspruch und somit einen Schnittpunkt. Die Berechnung von r ist nicht notwendig ($r = 5$).

$$\text{Setzen wir } s \text{ in die Gerade } g_{BF} \text{ ein, dann erhalten wir } \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \cdot \begin{pmatrix} -9,3 \\ 5,1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 15,5 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$S(8,5|15,5|15)$. *Alternative Rechenwege sind natürlich auch möglich.*

Die Höhe der Pyramide lässt sich an der z -Koordinate ablesen: $15m$, da alle weiteren Eckpunkte als z -Koordinate den Wert 0 haben.

Der Lichtstrahl durch die Pyramidenspitze S verläuft entlang der Geraden $l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 15,5 \\ 15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4,8 \\ -1,4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist hier der Spurpunkt in der xy -Ebene:

$\begin{cases} x = 8,5 - 4,8r \\ y = 15,5 - 1,4r \\ 0 = 15 - 3r \end{cases}$ Aus der letzten Gleichung folgt, dass $r = 5$ sein muss. Setzen wir diesen Wert in die ersten beiden Gleichungen ein, erhalten wir $x = -15,5$ und $y = 8,5$. Der Mittelpunkt M des Opferplatzes lag daher bei $M(-15,5|8,5|0)$.