

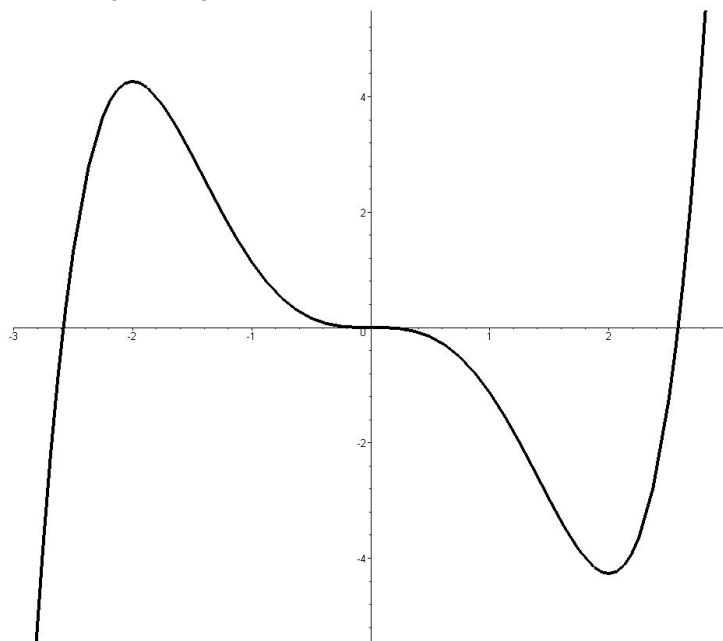
Mündliche Abiturprüfung im Fach Mathematik

Prüfling: John Doe

Datum: April 2013

1. Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$ und ihr Graph G_f .

- Begründen Sie, dass der Graph von f die angegebene Form hat (die y -Werte der Extrem- und Wendepunkte müssen nicht berechnet werden).
- Skizzieren Sie in das gleiche Achsenkreuz den Graphen der Ableitungsfunktion $f'(x)$ und erläutern Sie, wie die Graphen von f' und von f zusammenhängen.
- Erläutern Sie die Schritte, die zur Berechnung der eingeschlossenen Fläche zwischen G_f und der x -Achse erforderlich sind.



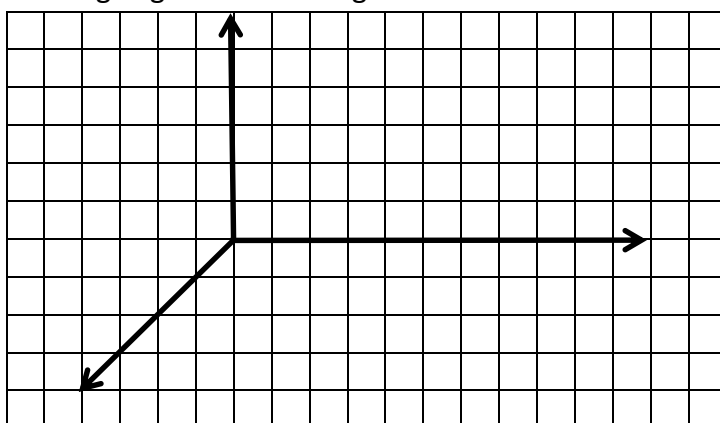
/25

/20

/15

2. Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$.

- Zeigen Sie, dass die Ebene E und die Ebene $F: 2x + 2y - 2z = 2$ identisch sind.
- Zeichnen Sie in das vorbereitete Koordinatensystem ein Schrägbild der Ebene E , wählen Sie eine geeignete Skalierung und kennzeichnen Sie die Achsen.



/10

- Bestimmen Sie die gegenseitige Lage von g und E .

/20

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Punkte	100-96	95-91	90-86	85-81	80-76	75-71	70-66	65-61	60-56	55-51	50-46	45-41	40-34	33-27	26-20	19-0

Musterlösung

1.

- a) Der Graph G_f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da nur ungerade Exponenten bei der ganzrationalen Funktion vorhanden sind.

$$f(x) = x^3 \cdot \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{3}\right)$$

$$f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 4)$$

$$f''(x) = 4x^3 - 8x = 4x \cdot (x^2 - 2)$$

$$f'''(x) = 12x^2 - 8$$

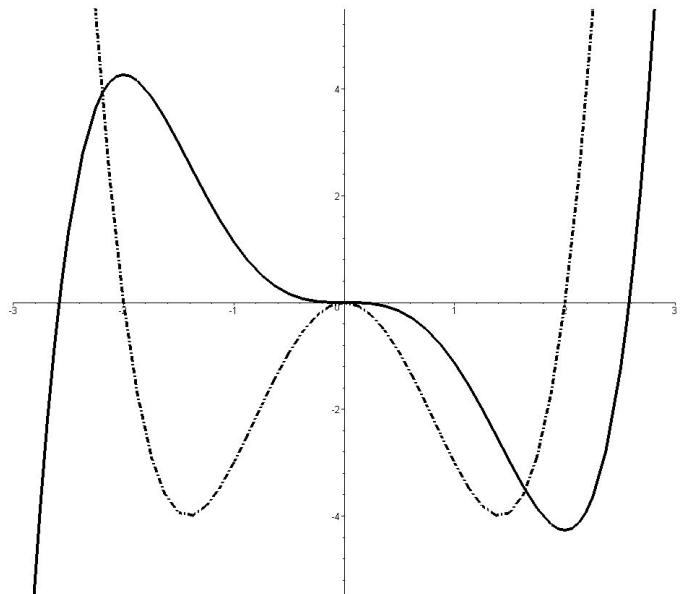
An der Produktschreibweise der Funktion sieht man, dass bei $x_{N_1} = 0$ eine dreifache Nullstelle vorliegt. Der Graph muss daher hier die x -Achse schneiden. Daneben gibt es noch zwei weitere Nullstellen: eine positive und eine negative. An der ersten Ableitung erkennt man unmittelbar die möglichen Extremstellen: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Bei x_1 liegt ein Hochpunkt vor, da $f''(x_1) < 0$ ist. Folglich muss bei x_2 ein Tiefpunkt sein. $x_3 = 0$ scheidet als mögliche Extremstelle aus, da hier eine doppelte Nullstelle vorliegt, also gibt es auch keinen Vorzeichenwechsel. Hier liegt ein Sattelpunkt vor, da auch die zweite Ableitung an dieser Stelle eine Nullstelle hat und die dritte Ableitung ungleich Null ist. Es gibt zwei weitere Wendestellen bei $\pm\sqrt{2}$ (die dritte Ableitung ist an diesen Stellen ungleich Null). Da der erste Koeffizient der Funktion positiv ist, muss die Funktion zuerst steigen. Wegen diesen Argumenten hat der gegebene Graph seine Form.

- b) Extremstellen der Funktion werden zu Nullstellen der ersten Ableitung. Der Sattelpunkt im Ursprung hat zur Folge, dass die Ableitung hier keinen Vorzeichenwechsel hat. Die x -Achse wird daher nur berührt und nicht geschnitten. Steigt die Funktion, dann verläuft der Graph der Ableitung oberhalb der x -Achse, ansonsten unterhalb. An den Wendestellen der Funktion besitzt die erste Ableitung ihre Extrema.

- c) Aus Symmetriegründen reicht es:

$$A = 2 \cdot \int_{-\frac{2\sqrt{15}}{3}}^0 f(x) dx$$

zu berechnen. Zuerst muss die bereits genannte Nullstelle berechnet werden. Danach wird die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{3}x^4 + C$ benötigt. Hier werden beide Integralgrenzen eingesetzt und die Differenz gebildet. Das Ergebnis wird dann verdoppelt und man erhält den gesuchten Flächeninhalt.

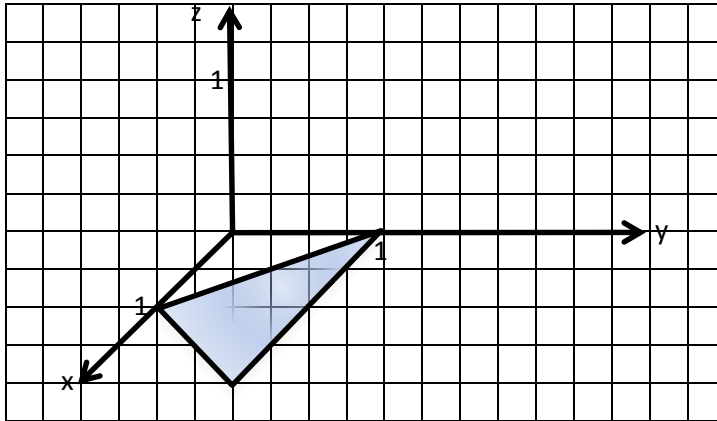


2.

- a) Berechnet man das Skalarprodukt der Ebenengleichung E , dann erhält man Gleichung F :

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2x + 2y - 2z - 2 = 0$$

- b) Berechnet man die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen, so erhält man: $S_x(1|0|0)$, $S_y(0|1|0)$, $S_z(0|0|-1)$.



- c) Das Skalarprodukt des Richtungsvektors der Geraden mit dem Normalenvektor der Ebene

ergibt: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 - 2 - 2 = 0$. Setzen wir weiterhin den Stützvektor der Gera-

den als Ortsvektor in die Ebenengleichung ein, so erhalten wir keinen Widerspruch: $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2$. Aus beiden Zwischenergebnissen folgt, dass die Gerade g in der Ebene E liegt. Hätte sich ein Widerspruch ergeben, dann würde die Gerade echt parallel zur Ebene verlaufen. Wäre das Skalarprodukt ungleich Null, dann gäbe es einen Durchstoßpunkt. Um diesen zu berechnen, würde man die Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen.