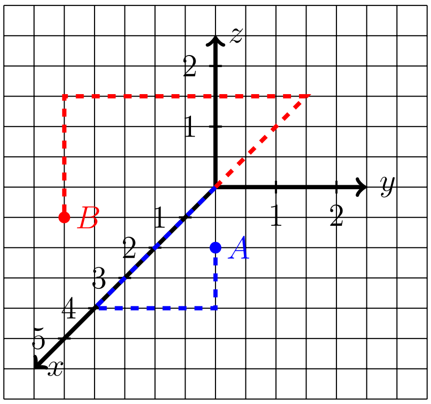
Beispiel 1

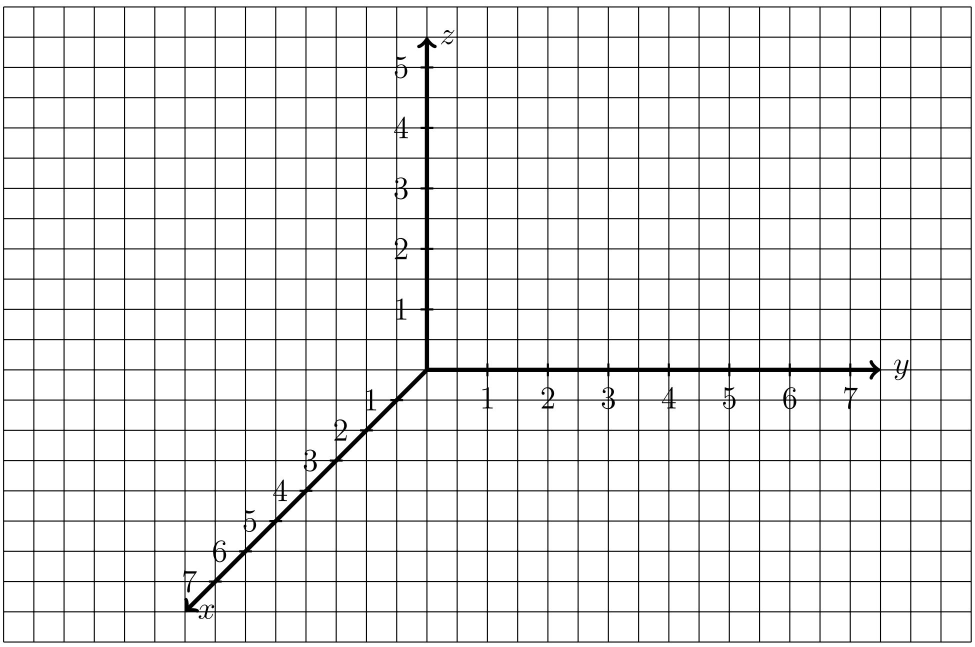
Um einen Punkt in ein dreidimensionales Koordinatensystem einzuzeichnen, müssen Sie unbedingt in der Reihenfolge der Koordinaten vorgehen: zuerst die x-Koordinate, dann y und zum Schluss z (wie im Alphabet). Das bedeutet, Sie gehen zuerst in Richtung der x-Achse und dann von dort, wo sie ankommen, in Richtung der y-Achse und schließlich von ihrem zweiten Zwischenstopp ausgehend in Richtung der z-Achse. Achten Sie dabei auf die Skala der jeweiligen Achse! Für die Punkte $A(4|2|1)$ und $B(-3|-4|-2)$ zeige ich Ihnen den Weg (den Sie bei den folgenden Aufgaben nicht einzeichnen müssen, aber dürfen):



Aufgabe 1

Zeichnen Sie die folgenden Punkte in das vorgegebene Koordinatensystem:

a $A(5|6|1)$ **b** $B(-2|4|2)$ **c** $C(3|-2|4)$ **d** $D(-1|3|-2)$



3D vs. 2D

Wenn Sie jetzt der Meinung sind, dass die beiden Punkte A und D an der gleichen Stelle im Raum sind, dann haben Sie sich getäuscht! Nur in dieser zweidimensionalen Zeichnung liegen die Punkte aufeinander, aber in Wirklichkeit sind sie es nicht!
Tipp: Stellen Sie sich die Punkte räumlich vor.

Aufgabe 2

Das Dreieck ABC wird senkrecht auf die yz-Ebene projiziert, also in unserem Klassenraum die Wand mit der Tafel. Es entsteht das Dreieck $A'B'C'$. Geben Sie die Punkte A', B' und C' an.

a $A(4|3|1)$, $B(5|7|2)$, $C(2|3|4)$

b $A(6|2|2)$, $B(-4|4|4)$, $C(2|-3|2)$

Aufgabe 3

Das Dreieck ABC wird jetzt senkrecht an der yz-Ebene gespiegelt. Es entsteht das Dreieck $A'B'C'$. Geben Sie die Punkte A', B' und C' an.

a $A(4|3|1)$, $B(5|7|2)$, $C(2|3|4)$

b $A(6|2|2)$, $B(-4|4|4)$, $C(2|-3|2)$

Abstand zweier Punkte in der Ebene

Der Abstand zweier Punkte $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Abstand zweier Punkte im Raum

Der Abstand zweier Punkte $A(x_1|y_1|z_1)$ und $B(x_2|y_2|z_2)$ kann ebenso berechnet werden:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie den Abstand der Punkte A und B

a $A(4|2)$, $B(10|10)$

b $A(1|-1|2)$, $B(4|5|8)$

Aufgabe 5

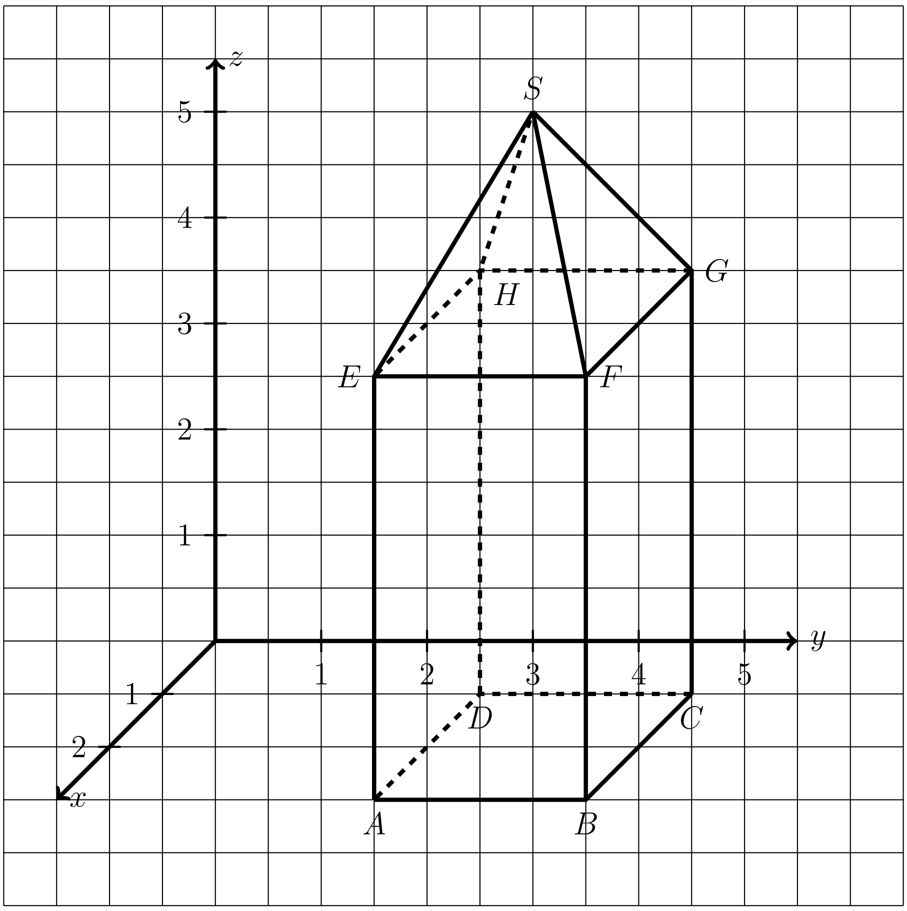
Berechnen Sie die unbekannte Koordinate, sodass der Abstand der beiden Punkte d beträgt.

a $A(4|2)$, $B(9|y)$, $d = 13$

b $A(1|-1|4)$, $B(3|2|z)$, $d = 7$

Aufgabe 6

Ein Quader mit quadratischer Grundfläche in der xy-Ebene hat eine aufgesetzte senkrechte Pyramide mit der Höhe zwei. Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des zusammengesetzten Körpers.

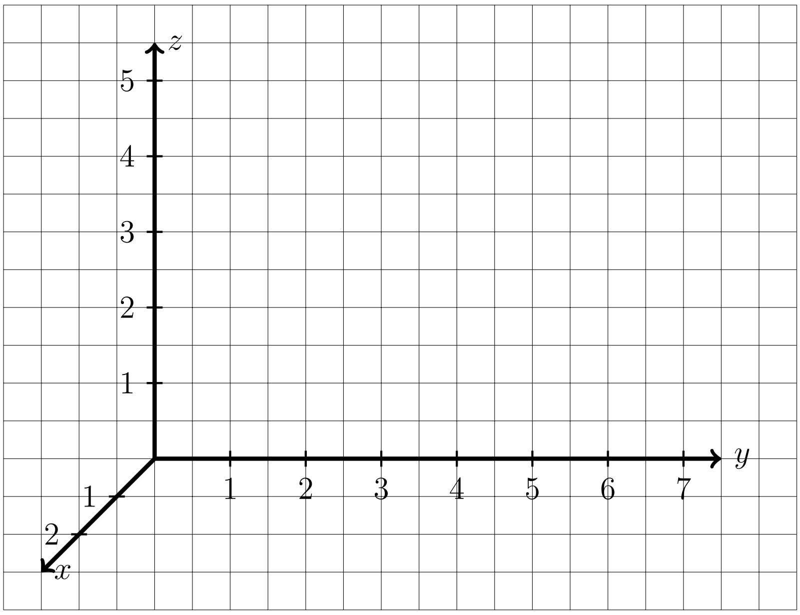


Aufgabe 7

Ein Würfel besitzt als Grundfläche das Quadrat $ABCD$ und als Deckfläche das Quadrat $EFGH$, wobei E über A liegt, F über B und so fort. Folgende Eckpunkte sind davon gegeben: $A(4|3|1)$, $B(4|7|1)$, $G(0|7|5)$.

a Zeichnen Sie den Würfel als dreidimensionales Schrägbild in das vorbereitete Koordinatensystem.

b Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten der Eckpunkte und zusätzlich den Würfelmittelpunkt M.



Vektor

Ein Vektor, der anschaulich als Pfeil dargestellt wird, besitzt eine **Länge** und eine **Richtung**, aber **keinen Anfang** – wie ein Umleitungsschild 

im Straßenverkehr, das an eine beliebige Stelle gesetzt werden kann und immer in die gleiche Richtung zeigt.

Beispiel 2

Gegeben sind beispielsweise die Punkte $P(2|1)$ und $Q(6|4)$. Dann wäre der Vektor von P zu Q: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, da man in x-Richtung vier Einheiten und in y-Richtung drei Einheiten „gehen" muss, um von P zu Q zu gelangen.

Möchte man umgekehrt von Q zu P, dann wäre dies der richtige Vektor: $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Wie man leicht einsehen kann, ändert sich nur das Vorzeichen, wenn der Vektor in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie jeweils die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$

a $A(2|-3)$, $B(-2|1)$

b $A(1|2|-3)$, $B(5|6|1)$

c $A(-4|-3|5)$, $B(2|3|-1)$

d $A(3|4|7)$, $B(2|6|2)$

Ortsvektor

Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ ist ein besonderer Vektor, der immer im Koordinatenursprung beginnt und im Punkt P endet. Für den Punkt $A(1|2|3)$ wäre der Ortsvektor:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Betrag eines Vektors

Der Betrag eines Vektors $\vec{v}$, also seine Länge, kann analog zu den Abstandsformeln mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden. Schreibweise: $|\vec{v}|$.

Beispiel 3

Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$

Aufgabe 9

Bestimmen Sie jeweils den Betrag des gegebenen Vektors.

a $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

d $\begin{pmatrix} 3t \\ 0 \\ 4t \end{pmatrix}$

Aufgabe 10

Berechnen Sie den Parameter k, sodass der Vektor die angegebene Länge hat.

a $\vec{a} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}, |\vec{a}| = 1$

b $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2k \\ k \\ 2k \end{pmatrix}, \left|\vec{b}\right| = 5$

Aufgabe 11

Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ verschiebt den Punkt P in den Punkt Q.
Bestimmen Sie P bzw. Q.

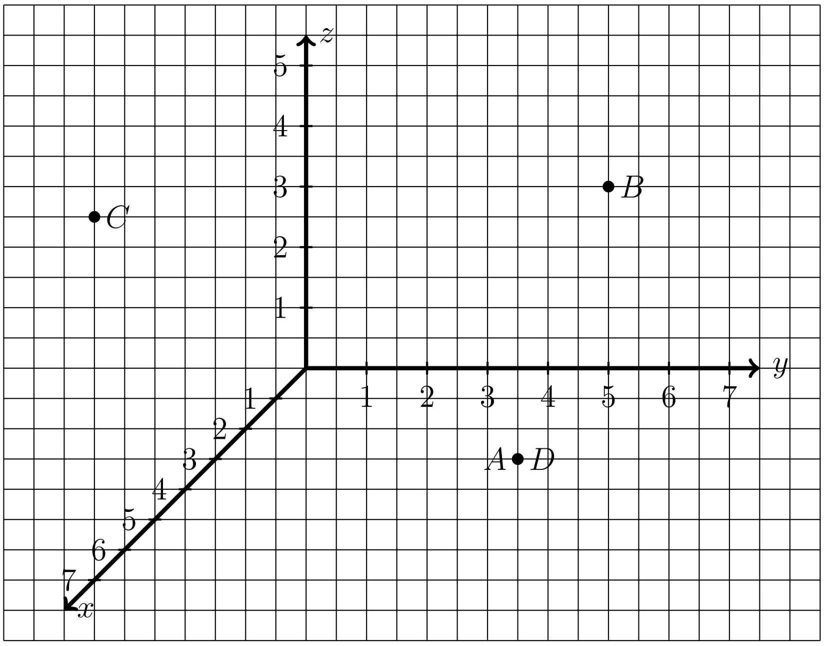
a $P(3|2|1)$

b $P(3|-2|4)$

c $Q(1|0|2)$

d $Q(0|0|0)$

Lösung 1



Lösung 2

Da alle Bildpunkte in der yz-Ebene liegen, muss die x-Koordinate jeweils null sein:

a $A'(0|3|1)$, $B'(0|7|2)$, $C'(0|3|4)$

b $A'(0|2|2)$, $B'(0|4|4)$, $C'(0|-3|2)$

Lösung 3

Beispielsweise ist Punkt A aus Aufgabenteil **a** vier Längeneinheiten von der Tafel entfernt, da die x-Koordinate vier beträgt. Der Bildpunkt muss dann auf der anderen Seite der Tafel auch vier Längeneinheiten von ihr entfernt sein. Die beiden anderen Koordinaten ändern sich nicht. Dadurch ergeben sich folgende Bildpunkte:

a $A'(-4|3|1)$, $B'(-5|7|2)$, $C'(-2|3|4)$

b $A'(-6|2|2)$, $B'(4|4|4)$, $C'(-2|-3|2)$

Alternativ kann man auch sagen, dass sich nur das Vorzeichen der x-Koordinate ändert.

Lösung 4

a $|AB| = \sqrt{(10-4)^2 + (10-2)^2} = 10$

b $|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (5+1)^2 + (8-2)^2} = 9$

Lösung 5

a

$$
\begin{aligned}
13 &= \sqrt{(9-4)^2 + (y-2)^2} \\
169 &= 5^2 + (y-2)^2 \\
144 &= y^2 - 4y + 4 \\
0 &= y^2 - 4y - 140 \\
y_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 + 140} \\
y_{1,2} &= 2 \pm 12 \\
y_1 &= -10 \\
y_2 &= 14
\end{aligned}
$$

b

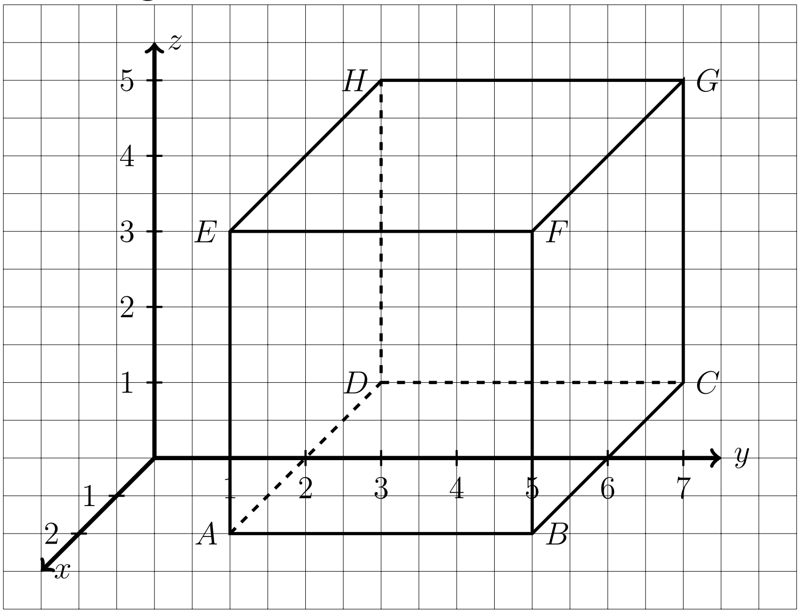
$$
\begin{aligned}
7 &= \sqrt{(3-1)^2 + (2+1)^2 + (z-4)^2} \\
49 &= 2^2 + 3^2 + (z-4)^2 \\
36 &= z^2 - 8z + 16 \\
0 &= z^2 - 8z - 20 \\
z_{1,2} &= 4 \pm \sqrt{4^2 + 20} \\
z_{1,2} &= 4 \pm 6 \\
z_1 &= -2 \\
z_2 &= 10
\end{aligned}
$$

Lösung 6

$A(3|3|0)$, $B((3|5|0))$, $C(1|5|0)$, $D(1|3|0)$, $E(3|3|4)$, $F(3|5|4)$, $G(1|5|4)$, $H(1|3|4)$, $S(2|4|6)$

Lösung 7

a Zeichnung:



b $C(0|7|1)$, $D(0|3|1)$, $E(4|3|5)$, $F(4|7|5)$, $H(0|3|5)$, $M(2|5|3)$

Lösung 8

a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

b $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

c $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

d $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Lösung 9

a $\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

b $\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 12^2} = 14$

c $\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$

d $\left|\begin{pmatrix} 3t \\ 0 \\ 4t \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(3t)^2 + 0^2 + (4t)^2} = \sqrt{25t^2} = 5t$

Lösung 10

a

$$\begin{aligned}\sqrt{k^2+(2k)^2}&=1\\ k^2+4k^2&=1\\ 5k^2&=1\\ k^2&=\frac{1}{5}\\ k&=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}\sqrt{(-2k)^2+k^2+(2k)^2}&=5\\ 4k^2+k^2+4k^2&=25\\ 9k^2&=25\\ k^2&=\frac{25}{9}\\ k&=\pm\frac{5}{3}\end{aligned}$$

Lösung 11

a $Q(2|4|-2)$ **b** $Q(2|0|1)$ **c** $P(2|-2|5)$ **d** $P(1|-2|3)$