Beweise sind in der Mathematik der Nachweis allgemeingültiger Aussagen. Schließlich könnte es bei einer Formel, die jemand gefunden hat, auch Ausnahmen geben. Daher wird die Aussage für alle Fälle bewiesen. Zuerst kommen die Voraussetzungen, dann die eigentliche Aussage (wird in der Mathematik meistens als „Satz“ bezeichnet) und zuletzt der Beweis, dass der Satz unter den genannten Voraussetzungen richtig ist.

Satz I:
f sei auf dem Intervall $[a; b]$ differenzierbar und punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, dann gilt: $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Bevor wir gleich zum Beweis kommen, noch ein paar Grundlagen vorweg:

(1) Ist der Graph einer Funktion $f(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung, dann gilt: $-f(x) = f(-x)$.

(2) Die Stammfunktion der Funktion $f(-x)$ lautet wegen der Kettenregel: $-F(-x)$.

(3) Intervalladditivität: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

(4) Vertauschung der Integralgrenzen: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

(5) Faktorregel: $\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und $k \in \mathbb{R}$

(6) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &\overset{(3)}{=} \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(4)}{=} \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(5)}{=} \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{0} -f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(1)}{=} \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \Big[F(x)\Big]_{-a}^{0} + \Big[-F(-x)\Big]_{a}^{0} \\
&\overset{(6)}{=} F(0) - F(-a) + \Big(-F(0)\Big) - \Big(-F(-a)\Big) \\
&= F(0) - F(0) - F(-a) + F(-a) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Hier noch ein weiteres Beispiel, dass sich geometrisch auch leicht begründen lässt:

Satz II:
f sei auf dem Intervall $[a;b]$ differenzierbar und achsensymmetrisch zur y-Achse, dann gilt: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

Ergänzend zu den obigen Grundlagen gilt:

(7) Ist der Graph einer Funktion $f(x)$ achsensymmetrisch zur y-Achse, dann gilt: $f(x) = f(-x)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &\overset{(3)}{=} \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(4)}{=} -\int\limits_{0}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(7)}{=} -\int\limits_{0}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(2)}{=} -\Big[-F(-x)\Big]_{0}^{-a} + \Big[F(x)\Big]_{0}^{a} \\
&\overset{(6)}{=} -\Big(-F(a)+F(0)\Big) + F(a) - F(0) \\
&= F(a) - F(0) + F(a) - F(0) = 2\cdot\Big(F(a)-F(0)\Big) \\
&\overset{(6)}{=} 2\cdot\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$