17.09.2007

Name: ____________________________

Thema: Umkreismittelpunkt

Gegeben sind die Eckpunkte eines Dreiecks $A(0|0)$, $B(4|1)$ und $C(1|6)$. Gesucht ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, der Umkreismittelpunkt U.

1. Schritt Wir berechnen die Mittelpunkte der Dreiecksseiten $M_{\overline{AB}}$, $M_{\overline{BC}}$ und $M_{\overline{AC}}$ mit der Formel $\boxed{M_{\overline{PQ}}\left(\frac{x_P+x_Q}{2}\,\middle|\,\frac{y_P+y_Q}{2}\right)}$, wobei P und Q zwei beliebige Punkte sind.

In unserem Beispiel: $M_{\overline{AB}}\left(\frac{0+4}{2}=2\,\middle|\,\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}\right)$; $\quad M_{\overline{BC}}\,(2{,}5\,|3{,}5)$; $\quad M_{\overline{AC}}\,(0{,}5\,|3)$

2. Schritt Wir bestimmen die Steigung der Dreiecksseiten $\boxed{m=\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}}$, um daraus jeweils die Steigung der Mittelsenkrechten zu berechnen.

$\boxed{\text{Die Steigung der Orthogonalen (Senkrechten) ist der negative Kehrwert: } m_\perp=-\frac{1}{m}}$

Für unser Beispiel folgt daraus: $m_{\overline{AB}}=\frac{1}{4}\Rightarrow m_{\perp\overline{AB}}=-4$; $\quad m_{\perp\overline{BC}}=\frac{3}{5}$; $\quad m_{\perp\overline{AC}}=-\frac{1}{6}$

3. Schritt Jetzt stellen wir die Geradengleichung der Mittelsenkrechten auf. Dazu haben wir im ersten Schritt die Mittelpunkte bestimmt und im zweiten die jeweiligen Steigungen. Es fehlt also nur noch der y-Achsenabschnitt b. Setzen wir alle bekannten Werte in die Gleichung $y=m\cdot x+b$ ein, dann erhalten wir $0{,}5=-4\cdot 2+b$. Nun lösen wir nach b auf und erhalten als Gleichung für die erste Mittelsenkrechte (1) $y=-4x+8{,}5$. Ebenso verfahren wir mit den beiden anderen: (2) $y=\frac{3}{5}x+2$ und (3) $y=-\frac{1}{6}x+\frac{37}{12}$.

4. Schritt Im letzten Schritt berechnen wir den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Hierzu benötigen wir nur zwei der drei Geraden! Wir hätten uns also vorher etwas Arbeit sparen können. Betrachten wir einmal Gleichung (1) und (2) und wenden das Subtraktionsverfahren an (1) - (2): $0=-4{,}6x+6{,}5$. Lösen wir die Gleichung nach x auf, dann erhalten wir die x-Koordinate des Schnittpunkts: $\frac{65}{46}$. Setzen wir diesen Wert in Gleichung (1) oder (2) ein, dann erhalten wir als y-Koordinate: $\frac{131}{46}$.

$\Rightarrow \quad U\left(\frac{65}{46}\,\middle|\,\frac{131}{46}\right)$ bzw. $U\,(1{,}413\,|2{,}848)$.

Übungsaufgaben Wenden Sie das oben beschriebene Verfahren auf folgende Dreiecke an und achten Sie auf Sonderfälle, die bisher nicht erwähnt wurden! Ein Programm zur Kontrolle eigener Aufgaben finden Sie auf meiner Homepage in der Rubrik → Mathematik → Programme.

(a) $A(-2|-2)$, $B(2|-2)$ und $C(0|6)$

(b) $A(-1|0)$, $B(4|2)$ und $C(-1|6)$

(c) $A(1|-2)$, $B(4|0)$ und $C(5|6)$

Lösungen $U_{(a)}(0|1{,}75)$, $U_{(b)}(0{,}7|3)$, $U_{(c)}(-0{,}75|3{,}875)$