



1 Funktion und Ableitungen:

$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4$	Funktion
$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$	1. Ableitung
$f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$	2. Ableitung
$f'''(x) = -\frac{3}{4}$	3. Ableitung

2 Symmetrie

Da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten (Hochzahlen) vorkommen, ist der Graph weder zur y -Achse noch zum Ursprung symmetrisch. Falls keine ganzrationale Funktion vorliegt, muss überprüft werden, ob:

$$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow \text{Achsensymmetrie zur } y\text{-Achse} \quad \text{oder}$$

$$-f(-x) = f(x) \Leftrightarrow \text{Punktsymmetrie zum Ursprung} \quad \text{gilt.}$$

3 Nullstellen

Durch Raten erhält man als eine Nullstelle zum Beispiel: $N_1(-2|0)$.

Eine Polynomdivision durch den Faktor $(x + 2)$ ergibt: $-\frac{1}{8}x^2 + x - 2$.

$$-\frac{1}{8}x^2 + x - 2 = 0 \quad | \cdot (-8)$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \quad | \text{pq-Formel}$$

$$x_{2,3} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 16}$$

$$x_{2,3} = 4$$

Wir haben noch eine weitere, doppelte Nullstelle gefunden: $N_{2,3}(4|0)$.

Anmerkungen:

- Bei einer doppelten Nullstelle wird die x -Achse nicht geschnitten, sondern nur berührt!
- Die Funktion lässt sich auch als Produkt schreiben: $f(x) = -\frac{1}{8}(x - 4)^2(x + 2)$.



4 Untersuchung auf Extremstellen (Hoch- und Tiefpunkte):

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{array}{rcl}
 -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x = 0 & \left| \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \right. & \\
 x^2 - 4x = 0 & \left| x \text{ ausklammern} \right. & \\
 x(x - 4) = 0 & & \\
 x_{e_1} = 0 & & \\
 x_{e_2} = 4 & &
 \end{array}$$

Sowohl an der Stelle $x_{e_1} = 0$ als auch bei $x_{e_2} = 4$ ist ein Extremum möglich! Setzen wir die beiden x -Werte in die zweite Ableitung ein erhalten wir:

$$\begin{array}{l}
 f''(0) = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow T \\
 f''(4) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow H
 \end{array}$$

Damit haben wir einen Hochpunkt $H(4|0)$ und einen Tiefpunkt $T(0|-4)$ gefunden. Die y -Koordinate der Punkte erhält man übrigens immer durch Einsetzen in die Funktionsgleichung: $f(4) = 0$ und $f(0) = -4$.

5 Wendestellen

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\begin{array}{rcl}
 -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} = 0 & \left| \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \right. & \\
 x - 2 = 0 & \left| +2 \right. & \\
 x_w = 2 & &
 \end{array}$$

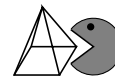
Ein möglicher Wendepunkt liegt folglich bei $x_w = 2$. Einsetzen in die dritte Ableitung ergibt: $f'''(2) = -\frac{3}{4} \neq 0$. Damit haben wir die Bestätigung, dass wirklich ein Wendepunkt vorliegt: $W(2|-2)$.

6 Verhalten von f für betragsmäßig große x

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

7 Wertebereich

Mit Hilfe der Untersuchung über das Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$, kann man den Wertebereich angeben, also welche Funktionswerte angenommen werden: $W =] - \infty; \infty[$



8 Zeichnung

