1 Funktion und Ableitungen:

$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4$	Funktion
$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$	1. Ableitung
$f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$	2. Ableitung
$f'''(x) = -\frac{3}{4}$	3. Ableitung

2 Symmetrie

Da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten (Hochzahlen) vorkommen, ist der Graph weder zur y-Achse noch zum Ursprung symmetrisch. Falls keine ganzrationale Funktion vorliegt, muss überprüft werden, ob:
$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse *oder*
$-f(-x) = f(x) \Leftrightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung gilt.

3 Nullstellen

Durch Raten erhält man als eine Nullstelle zum Beispiel: $N_1(-2|0)$.
Eine Polynomdivision durch den Faktor $(x + 2)$ ergibt: $-\frac{1}{8}x^2 + x - 2$.

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{8}x^2 + x - 2 &= 0 && | \cdot (-8) \\
x^2 - 8x + 16 &= 0 && |\text{pq-Formel} \\
x_{2,3} &= 4 \pm \sqrt{4^2 - 16} \\
x_{2,3} &= 4
\end{aligned}
$$

Wir haben noch eine weitere, doppelte Nullstelle gefunden: $N_{2,3}(4|0)$.

Anmerkungen:

- Bei einer doppelten Nullstelle wird die x-Achse nicht geschnitten, sondern nur berührt!
- Die Funktion lässt sich auch als Produkt schreiben: $f(x) = -\frac{1}{8}(x-4)^2(x+2)$.

4 Untersuchung auf Extremstellen (Hoch- und Tiefpunkte):

<u>Notwendige Bedingung:</u> $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x &= 0 && \Big| \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \\ x^2 - 4x &= 0 && |x \text{ ausklammern} \\ x(x-4) &= 0 \\ x_{e_1} &= 0 \\ x_{e_2} &= 4 \end{aligned}$$

Sowohl an der Stelle $x_{e_1} = 0$ als auch bei $x_{e_2} = 4$ ist ein Extremum möglich! Setzen wir die beiden x-Werte in die zweite Ableitung ein erhalten wir:

$$f''(0) = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow T$$
$$f''(4) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow H$$

Damit haben wir einen Hochpunkt $H(4|0)$ und einen Tiefpunkt $T(0|-4)$ gefunden. Die y-Koordinate der Punkte erhält man übrigens immer durch Einsetzen in die Funktionsgleichung: $f(4) = 0$ und $f(0) = -4$.

5 Wendestellen

<u>Notwendige Bedingung:</u> $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} &= 0 && \Big| \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \\ x - 2 &= 0 && |+2 \\ x_w &= 2 \end{aligned}$$

Ein möglicher Wendepunkt liegt folglich bei $x_w = 2$. Einsetzen in die dritte Ableitung ergibt: $f'''(2) = -\frac{3}{4} \neq 0$. Damit haben wir die Bestätigung, dass wirklich ein Wendepunkt vorliegt: $W(2|-2)$.

6 Verhalten von f für betragsmäßig große x

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

7 Wertebereich

Mit Hilfe der Untersuchung über das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$, kann man den Wertebereich angeben, also welche Funktionswerte angenommen werden: $W =]-\infty; \infty[$

8 Zeichnung