Gegeben seien Funktionen f_k durch $f_k(x) = x^4 - kx^2$, $k > 0$. Untersuche allgemein die Funktionen f_k und berechne sowohl die Ortskurve der Extrema als auch die der Wendepunkte. Zeichne den Graphen für $k = 1$ und $k = 2$ und beide Ortskurven in ein gemeinsames Koordinatensystem.

1 Funktionenschar und Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_k(x) &= x^4 - k \cdot x^2 && \text{Funktionenschar} \\ f_k'(x) &= 4x^3 - 2k \cdot x && \text{1. Ableitung} \\ f_k''(x) &= 12x^2 - 2k && \text{2. Ableitung} \\ f_k'''(x) &= 24x && \text{3. Ableitung} \end{aligned}$$

2 Symmetrie

Da ausschließlich gerade Exponenten (Hochzahlen) vorkommen, ist der Graph symmetrisch zur y-Achse.

3 Nullstellen

$$\begin{aligned} x^4 - kx^2 &= 0 && |x^2 \text{ ausklammern} \\ x^2\left(x^2 - k\right) &= 0 && |\text{Fallunterscheidung} \end{aligned}$$

1. Fall:

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 && |\sqrt{} \\ x_{1,2} &= 0 && \text{(doppelte Nullstelle)} \end{aligned}$$

2. Fall:

$$\begin{aligned} x^2 - k &= 0 && | + k \\ x^2 &= k && |\sqrt{} \\ x_{3,4} &= \pm\sqrt{k} \end{aligned}$$

Damit haben wir drei Nullstellen gefunden, wobei die erste *nicht* von k abhängig ist: $N_{1,2}(0|0)$, $N_3\left(-\sqrt{k}\middle|\,0\right)$, $N_4\left(\sqrt{k}\middle|\,0\right)$.

4 Extrema:

Notwendige Bedingung: $f_k'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 4x^3 - 2kx &= 0 && \mid x \text{ ausklammern} \\ 2x\left(2x^2 - k\right) &= 0 && \mid \text{Fallunterscheidung} \end{aligned}$$

1. Fall:

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ x_{e_1} &= 0 \end{aligned}$$

2. Fall:

$$\begin{aligned} 2x^2 - k &= 0 && \mid +k \\ 2x^2 &= k && \mid :2 \\ x^2 &= \frac{k}{2} && \mid \sqrt{\ } \\ x_{e_2} &= \pm\sqrt{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

Sowohl an der Stelle $x_{e_1} = 0$ als auch bei $x_{e_{2,3}} = \pm\sqrt{\frac{k}{2}}$ sind Extrema möglich! Setzen wir die drei x-Werte in die zweite Ableitung ein erhalten wir:

$$f_k''(0) = -2k < 0 \quad \Rightarrow \text{ Hochpunkt, da } k > 0 \text{ ist}$$

$$f_k''\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = 12\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right)^2 - 2k = 12 \cdot \frac{k}{2} - 2k = 6k - 2k = 4k > 0 \quad \Rightarrow \text{ Tiefpunkt}$$

$$f_k''\left(-\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = 4k > 0 \quad \Rightarrow \text{ Tiefpunkt}$$

Damit haben wir einen Hochpunkt $H(0|0)$ und zwei Tiefpunkte $T_1\left(-\sqrt{\frac{k}{2}}\middle| -\frac{k^2}{4}\right)$, $T_2\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\middle| -\frac{k^2}{4}\right)$ gefunden.

5 Ortskurve der Extrema

Im vorherigen Abschnitt haben wir die beiden Tiefpunkte berechnet:

$$T_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{k}{2}}\,\middle|\,-\frac{k^2}{4}\right)$$

Die x-Koordinate ist also: $x=\pm\sqrt{\frac{k}{2}}$ und für die y-Koordinate gilt: $y=-\frac{k^2}{4}$. Ziel ist es eine Beziehung zwischen x und y herzustellen, jedoch **ohne** den Parameter k. Dazu lösen wir (immer!) die Gleichung mit x nach k auf und setzen sie in die Gleichung mit y ein. Dadurch wird der Parameter k eliminiert. Hier geht es ganz leicht, indem wir die erste Gleichung hoch 4 nehmen: $x^4=\frac{k^2}{4}$. Einsetzten in die zweite Gleichung führt zu: $y=-x^4$ und damit haben wir eine Kurve, auf der alle Tiefpunkte liegen. Da der Graph der Ortskurve auch durch den Koordinatenursprung verläuft, liegt auch der von k unabhängige Hochpunkt auf der Ortskurve. Somit können wir sagen, dass $y=-x^4$ die Ortskurve aller Extrema ist (Dunkelgrüne Kurve in der Zeichnung).

6 Wendepunkte

Notwendige Bedingung: $f_k''(x)=0$

$$\begin{aligned}
12x^2-2k&=0 && \mid +2k\\
12x^2&=2k && \mid :12\\
x^2&=\frac{k}{6} && \mid\sqrt{}\\
x_{w_{1,2}}&=\pm\sqrt{\frac{k}{6}}
\end{aligned}$$

Zwei mögliche Wendepunkte liegen folglich bei $x_{w_{1,2}}=\pm\sqrt{\frac{k}{6}}$. Einsetzen in die dritte Ableitung ergibt: $f_k'''\left(\pm\sqrt{\frac{k}{6}}\right)=\pm4\sqrt{6k}\neq0$. Damit haben wir die Bestätigung, dass wirklich Wendepunkte vorliegen: $W_1\left(-\sqrt{\frac{k}{6}}\,\middle|\,-\frac{5k^2}{36}\right)$, $W_2\left(\sqrt{\frac{k}{6}}\,\middle|\,-\frac{5k^2}{36}\right)$.

7 Ortskurve der Wendepunkte

Im vorherigen Abschnitt haben wir die beiden Wendepunkte berechnet:

$$W_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{k}{6}}\middle|-\frac{5k^2}{36}\right)$$

Die x-Koordinate ist also: $x=\pm\sqrt{\frac{k}{6}}$ und für die y-Koordinate gilt: $y=-\frac{5k^2}{36}$. Ziel ist es – wie bei der Ortskurve der Extrema – eine Beziehung zwischen x und y herzustellen, jedoch **ohne** den Parameter k. Dazu lösen wir auch hier die Gleichung mit x nach k auf (immer!) und setzen sie in die Gleichung mit y ein. Dadurch wird der Parameter k eliminiert. Hier geht es ganz leicht, indem wir die erste Gleichung hoch 4 nehmen: $x^4=\frac{k^2}{36}$. Einsetzten in die zweite Gleichung führt zu: $y=-5x^4$ und damit haben wir eine Kurve, auf der alle Wendepunkte liegen (Kurve in orange in der Zeichnung).

8 Verhalten von f für betragsmäßig große x

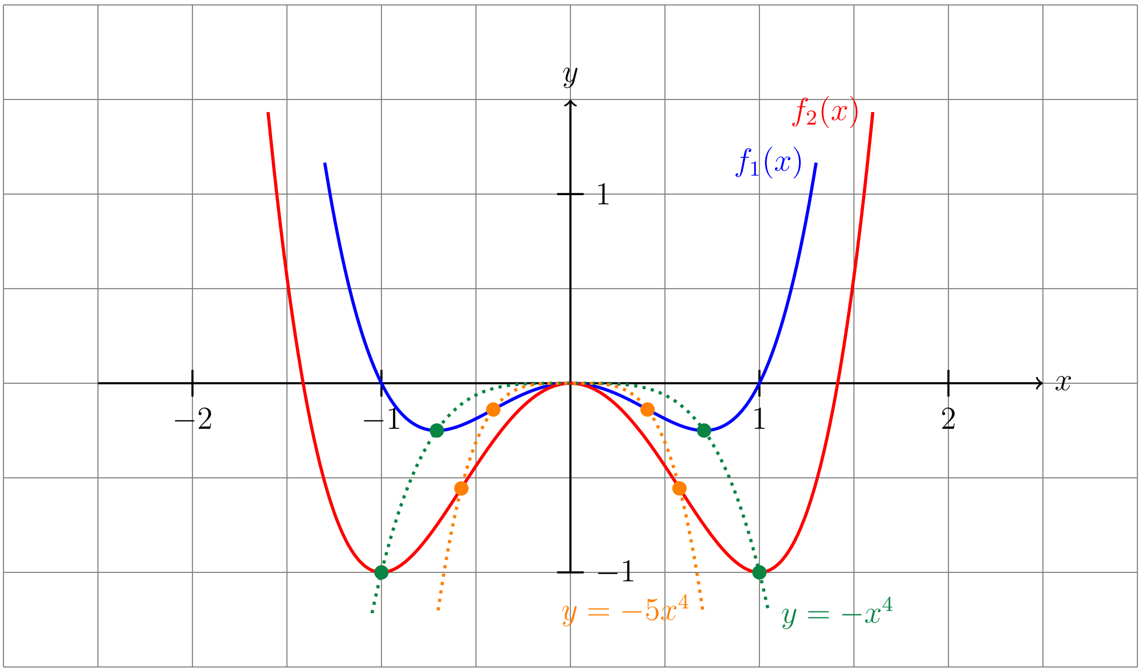
Wenn $x\to-\infty$, dann $f_k(x)\to+\infty$
Wenn $x\to+\infty$, dann $f_k(x)\to+\infty$
Etwas mehr mathematisch formuliert:

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x)=\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f_k(x)=\infty$$

9 Wertebereich

Mit Hilfe der Extrema und der Untersuchung des Verhaltens von f_k für $x\to\pm\infty$, kann man den Wertebereich von f_k angeben, also welche Funktionswerte angenommen werden. An den Tiefpunkten erkennen wir, dass $-\frac{k^2}{4}$ der kleinste y-Wert ist, der angenommen wird.
$W=\left[-\frac{k^2}{4};\infty\right[$

10 Zeichnung



11 Dynamisches Arbeitsblatt

Auf meiner Homepage gibt es hierzu ein dynamisches Arbeitsblatt (erstellt mit Geogebra). Dort kann man über einen Schieberegler das k manuell verändern.

12 Weiteres Beispiel

Gegeben seien Funktionen f_k durch $f_k(x) = k^2x^3 - kx$, $k > 0$. Untersuche allgemein die Funktionen f_k und berechne auch die Ortskurve der Extrema. Zeichne den Graphen für $k = 1$ und $k = 2$ und die Ortskurve in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f_k(x) &= k^2x^3 - kx && \text{Funktionenschar}\\
f'_k(x) &= 3k^2x^2 - k && \text{1. Ableitung}\\
f''_k(x) &= 6k^2x && \text{2. Ableitung}\\
f'''_k(x) &= 6k^2 && \text{3. Ableitung}
\end{aligned}
$$

Symmetrie: Die Graphen sind punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da nur ungerade Exponenten vorkommen.

Nullstellen: $N_1(0|0)$, $N_2\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\middle|\,0\right)$, $N_3\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\middle|\,0\right)$

Extrema: $H\left(-\frac{1}{\sqrt{3k}}\middle|\,\sqrt{\frac{4k}{27}}\right)$, $T\left(\frac{1}{\sqrt{3k}}\middle|\,-\sqrt{\frac{4k}{27}}\right)$

Ortskurve der Extrema: $y = -\frac{2}{9x}$ (dunkelgrün in der Zeichnung)

Wendepunkt: $W\,(0|0)$

Verhalten von f für betragsmäßig große x:

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f_k(x) = \infty$$

Wertebereich: $W = \left]-\infty; \infty\right[$

Zeichnung: