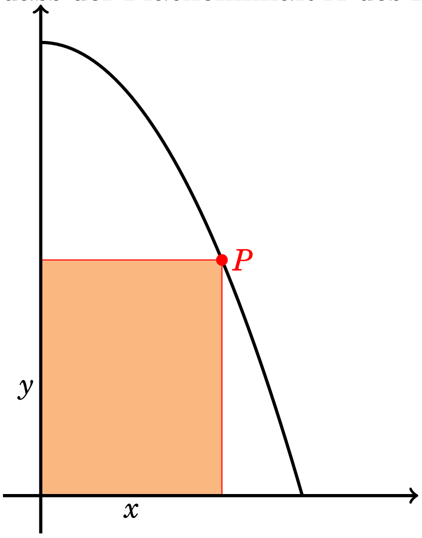
Auf dem Graph von f liegt im ersten Quadranten ein Punkt P. Dieser bildet die rechte obere Ecke eines Rechtecks, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Die linke untere Ecke befindet sich im Koordinatenursprung. Berechnen Sie die Koordinaten von P, sodass der Flächeninhalt A des Rechtecks maximal wird.



a $f(x) = 27 - x^2$

b $f(x) = 48 - x^2$

c $f(x) = 75 - x^2$

Lösungen

a Hauptbedingung:

$$A(x,y) = x \cdot y \to \text{max!}$$

Nebenbedingung:

$$y = f(x) = 27 - x^2$$

Zielfunktion:

$$A(x) = x \cdot \left(27 - x^2\right)$$
$$A(x) = -x^3 + 27x$$

Erste Ableitung:

$$A'(x) = -3x^2 + 27$$
$$0 = -3x^2 + 27 \quad \left| +3x^2 \right.$$
$$3x^2 = 27 \quad |:3$$
$$x^2 = 9 \quad \left| \sqrt{} \right.$$
$$x = 3 \qquad (x_2 = -3)$$

Zweite Ableitung:

$$A''(x) = -6x$$
$$A''(3) = -18 < 0 \Rightarrow \text{HP}$$

Höhe:

$$y = 27 - 3^2 = 18$$

Maximale Fläche:

$$A(3,18) = 54$$

b Hauptbedingung:

$$A(x,y) = x \cdot y \to \text{max!}$$

Nebenbedingung:

$$y = f(x) = 48 - x^2$$

Zielfunktion:

$$\begin{aligned} A(x) &= x \cdot \left(48 - x^2\right) \\ A(x) &= -x^3 + 48x \end{aligned}$$

Erste Ableitung:

$$\begin{aligned} A'(x) &= -3x^2 + 48 \\ 0 &= -3x^2 + 48 \quad \left| +3x^2 \right. \\ 3x^2 &= 48 \quad |:3 \\ x^2 &= 16 \quad \left| \sqrt{} \right. \\ x &= 4 \qquad (x_2 = -4) \end{aligned}$$

Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} A''(x) &= -6x \\ A''(4) &= -24 < 0 \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

Höhe:

$$y = 48 - 4^2 = 32$$

Maximale Fläche:

$$A(4,32) = 128$$

c Hauptbedingung:

$$A(x,y) = x \cdot y \to \text{max!}$$

Nebenbedingung:

$$y = f(x) = 75 - x^2$$

Zielfunktion:

$$\begin{aligned} A(x) &= x \cdot \left(75 - x^2\right) \\ A(x) &= -x^3 + 75x \end{aligned}$$

Erste Ableitung:

$$\begin{aligned} A'(x) &= -3x^2 + 75 \\ 0 &= -3x^2 + 75 \quad \left| +3x^2 \right. \\ 3x^2 &= 75 \quad |:3 \\ x^2 &= 25 \quad \left| \sqrt{} \right. \\ x &= 5 \qquad (x_2 = -5) \end{aligned}$$

Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} A''(x) &= -6x \\ A''(5) &= -30 < 0 \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

Höhe:

$$y = 75 - 5^2 = 50$$

Maximale Fläche:

$$A(5, 50) = 250$$